

# ĐÁNH GIÁ MÔ HÌNH GIẰNG CHỐNG BẰNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN

## EVALUATION OF STRUT-TIE MODELS USING FINITE-ELEMENT ANALYSIS

Mai Lữ

Khoa Công trình giao thông

Trường Đại học Giao thông vận tải Thành phố Hồ Chí Minh

**Tóm tắt:** Mô hình giằng chống là một trong những phương pháp thiết kế bê tông cốt thép (BTCT) hiệu quả cho các vùng D trong kết cấu. Đối với một vùng D cho trước thì có thể có nhiều mô hình giằng chống khác nhau để mô phỏng thiết kế và đây cũng là một thách thức đặt ra cho người kỹ sư để chọn mô hình phù hợp, đặc biệt là đối với những kết cấu có hình dáng và tải trọng phức tạp. Bài báo này sẽ trình bày một phương pháp để đánh giá các mô hình giằng chống bằng mô phỏng phần tử hữu hạn xét tới tính phi tuyến của vật liệu bê tông theo mô hình phá hủy đàn dẻo. Kỹ thuật cản giả cũng được sử dụng trong mô hình số để tăng tính ổn định khi giải bài toán. Từ đó, có thể tìm thấy tải trọng giới hạn, quá trình nứt của kết cấu BTCT và đánh giá mô hình giằng chống phù hợp.

**Từ khóa:** Mô hình giằng chống, vùng D, mô hình phá hủy, phần tử hữu hạn.

**Mã phân loại:** 11.2

**Abstract:** Strut-and-tie modeling is an effective design method to deal with D-regions of reinforced concrete structures. However, for a given D-region various strut-tie models can be generated. Therefore, modeling in structural concrete involves a trial-and-error process that requires some design experience, and this is also one of the major challenges to select an appropriate strut-tie system for a concrete structure with complex geometry and loading conditions from many possible equilibrium configurations. This paper presents an evaluation technique of strut-tie models based on finite-element analysis. The concrete damage plasticity (CDP) model along with the pseudo-damping scheme is also incorporated to analyze the system for cracks and to stabilize the solution, respectively. Hence, it can find that the ultimate load, cracking evolution history, and final crack pattern are predicted. From these results, strut-tie models can be evaluated.

**Keywords:** Strut-and-tie model, D-region, failure modes, FEM.

**Classification code:** 11.2

### 1. Tổng quan

Mô hình giàn ảo (STM) là phương pháp thiết kế linh hoạt và dựa trên nguyên lý giới hạn dưới của lý thuyết dẻo. STM được sử dụng khá phổ biến để thiết kế những vùng kết cấu không liên tục về hình học và tải trọng, thường gọi là vùng D. Sự không liên tục này tạo ra các phân bố biến dạng phi tuyến. Vì vậy giả thiết về biến dạng phẳng không còn phù hợp trên những vùng này và mô hình hệ giàn ảo STM là một giải pháp để phân tích vùng D.

Hệ STM có cấu tạo đơn giản và thường là hệ giàn quen thuộc tĩnh định nên việc giải bài toán tìm nội lực hệ thanh khá đơn giản. Đối với các kiểm toán khả năng chịu lực của hệ thông qua kiểm toán các phần tử của hệ thanh (gồm thanh kéo, thanh nén và nút) cũng tương đối rõ ràng và đơn giản. Như vậy việc tính toán khả năng chịu lực của kết cấu đã được đơn giản hóa bằng cách sử dụng một hệ thanh.

Phương pháp thiết kế BTCT theo mô hình STM đã chính thức áp dụng trong nhiều tiêu chuẩn tiên tiến trên thế giới như AASHTO LRFD, CSA A23.3, CEB-FIP Model Code 90,... và tiêu chuẩn thiết kế cầu của Việt Nam TCVN 11823-2017. Tuy nhiên, tình hình thực tế cho thấy phương pháp này được tiếp cận ở nước ta còn rất hạn chế do tài liệu hướng dẫn chưa cụ thể, và phần lớn các kỹ sư kết cấu chưa được trang bị một cách cơ bản về lý luận của phương pháp.

Các nghiên cứu [1] – [3] cho thấy rằng việc thiết lập sơ đồ hệ thanh là rất quan trọng trong phương pháp STM. Như đã trình bày, sơ đồ này được xác định dựa trên nguyên lý giới hạn dưới của lý thuyết dẻo. Nghĩa là một kết cấu sẽ không bị phá hoại dưới tác dụng của một hệ tải trọng nếu có thể tìm được một sự phân bố ứng suất hay nội lực bất kỳ thỏa mãn điều kiện cân bằng và giới hạn cường độ của

vật liệu. Nguyên lý này cho thấy có thể có vô số sơ đồ hệ thanh trong mô hình STM để thay thế một kết cấu bê tông cốt thép. Vì vậy, điều quan trọng là cần phải biết cách để có một sơ đồ hệ thanh hợp lý nhất, tức là sát với khả năng chịu lực của kết cấu thực. Sự đa dạng kết cấu trong thực tế là một rào cản lớn cho việc tìm mô hình STM. Để khắc phục nhược điểm trên, nghiên cứu [4] đã sử dụng tối ưu Topology nhằm tìm sơ đồ hệ thanh giàn cho kết cấu BTCT ở vùng D, và được đánh giá là khá hiệu quả. Tuy nhiên, việc đánh giá cách bố trí cốt thép ứng với mô hình STM được xác định từ thuật toán tối ưu Topology vẫn chưa được thực hiện trong nghiên cứu [4]. Do đó, bài báo này sẽ nghiên cứu xây dựng các mô hình kết cấu BTCT trong đó có xét đến tính phi tuyến của bê tông và cốt thép được thiết kế theo các mô hình giàn STM, bằng phân tích phần tử hữu hạn để đánh giá tính hợp lý các mô hình giàn STM.

## 2. Xây dựng mô hình giàn ảo bằng tối ưu Topology với thuật toán mật độ

Mục tiêu chính của bài toán tối ưu Topology là xác định cơ cấu truyền lực chính trong kết cấu BTCT ứng với một hệ tải trọng xác định để gia cường đảm bảo kết cấu đủ khả năng chịu lực. Khi đó, hệ truyền lực chính có thể được xác định bằng cách loại bỏ những vùng BTCT không hiệu quả. Nghĩa là bài toán thiết lập hệ giàn ảo có thể được xem như bài toán tối ưu hình học kết cấu hay tối ưu Topology. Bài toán tối ưu theo phương pháp mật độ được định nghĩa trong [6] như sau: Phân tích một vật thể biến dạng đàn hồi với thể tích  $\Omega$ , khu vực mặt biên  $\Gamma_i$  có điều kiện biên là  $\Omega_b$ , dưới tác dụng của lực mặt  $t$  và lực khối  $f$ . Khi đó:

$$\begin{aligned} \min \quad & l(\rho, \mathbf{u}) \\ \text{s.t.} \quad & a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\rho, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{v} \in U \\ & \rho \in \{0, 1\} \\ & \int_{\Omega} \rho d\Omega = V \leq \gamma V_0 \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó:

$$l(\rho, \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f}^T \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \mathbf{t}^T \mathbf{u} ds$$

$$a_\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} E_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} d\Omega$$

Và  $\mathbf{v}$  là trường chuyển vị khả dĩ ảo,  $\mathbf{u}$  là trường chuyển vị của vật thể biến dạng đàn hồi,  $U$  là tập của các chuyển vị khả dĩ,  $E_{ijkl}$  là mô đun đàn hồi của phần tử,  $V$  là thể tích giới hạn,  $V_0$  là tổng thể tích miền khảo sát,  $\gamma$  là hệ số thể tích.

Tiến hành giải hệ thống phương trình (1) bằng phương pháp mật độ như trình bày chi tiết trong [4] sẽ thu được hệ giàn ảo STM.

## 3. Mô hình phần tử hữu hạn

Biểu đồ ứng suất nén và biến dạng của bê tông trong mô hình CDP của Abaqus [9] được mô tả như sau:

Biến dạng phi tuyến (inelastic strain)  $\tilde{\epsilon}_c^{in}$  tương ứng với ứng suất nén  $\sigma_c$  đã được sử dụng trong mô hình CDP. Để có biến dạng này, ta phải thay thế tổng biến dạng từ biến dạng đàn hồi, tương ứng với vật liệu không bị phá hủy như sau:

$$\tilde{\epsilon}_c^{in} = \epsilon_c - \epsilon_{oc}^{el} \quad (2)$$

$$\epsilon_{oc}^{el} = \frac{\sigma_{c0}}{E_o}$$

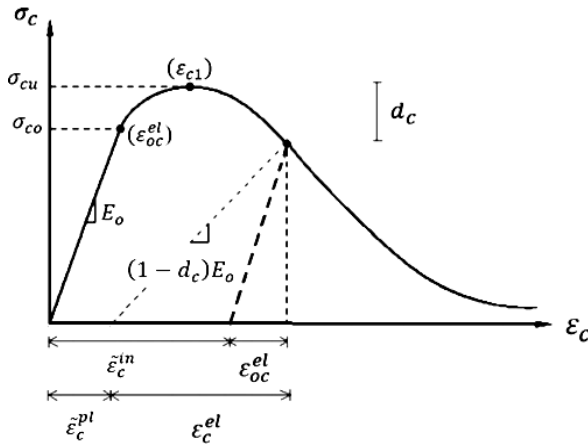
Ngoài ra, tham số độ bền nén  $d_c$  cần được xác định ở mỗi mức biến dạng không đàn hồi. Nó dao động từ 0 (đối với vật liệu không bị hư hại) đến 1 (khi vật liệu đó hoàn toàn mất khả năng chịu tải). Giá trị  $d_c$  chỉ thu được cho nhánh giảm dần của đường cong ứng suất - biến dạng của bê tông chịu nén như hình 1:

$$d_c = 0 \quad \text{khi } \epsilon_c < \epsilon_{c1} \quad (3)$$

$$d_c = \frac{\sigma_{cu} - \sigma_c}{\sigma_{cu}} \quad \text{khi } \epsilon_c \geq \epsilon_{c1}$$

Trong đó:  $\epsilon_{c1}$  biến dạng tương ứng tại điểm ứng suất lớn nhất. Do đó, biến dạng phi tuyến tính toán trong hình 1 được xác định như sau:

$$\tilde{\epsilon}_c^{pl} = \tilde{\epsilon}_c^{in} - \frac{d_c}{(1 - d_c)} \frac{\sigma_{c0}}{E_o}$$



Hình 1. Mô hình bê tông CDP dưới ứng suất nén.

**Quan hệ giữa ứng suất kéo và biến dạng của bê tông được mô tả như sau:**

Cường độ kéo của bê tông được lấy bằng 10% cường độ nén của nó. Độ cứng kéo đề cập đến hiện tượng bê tông có thể chịu ứng suất kéo ngay cả sau khi bị nứt, mặc dù cường độ kéo giảm dần khi ứng suất kéo tăng.

Biến dạng nứt  $\tilde{\epsilon}_t^{ck}$  tương ứng với ứng suất kéo,  $\sigma_t$ , được sử dụng trong mô hình CDP (hình 2). Để có được giá trị này, phải trừ đi biến dạng đàn hồi  $\epsilon_{ot}^{el}$ , từ tổng biến dạng kéo  $\epsilon_t$  như sau:

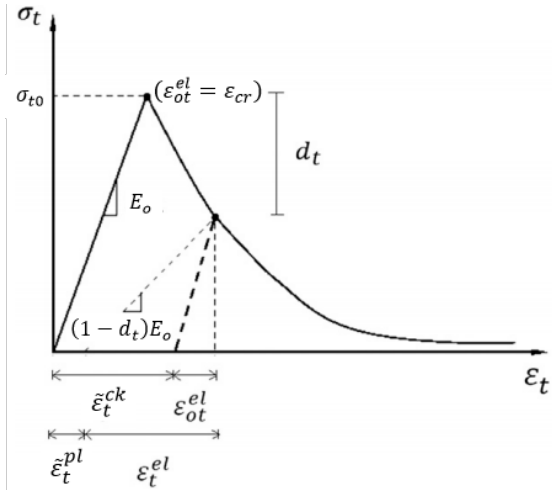
$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}_t^{ck} &= \epsilon_t - \epsilon_{ot}^{el} & (4) \\ \epsilon_{ot}^{el} &= \frac{\sigma_{to}}{E_o} \end{aligned}$$

Tương tự như trường hợp nén, tham số  $d_t$  độ bền kéo cần được xác định tại mỗi biến dạng nứt. Giá trị  $d_t$  chỉ có giá trị tại nhánh giảm dần của đường cong ứng suất - biến dạng của bê tông chịu kéo như sau (hình 2):

$$\begin{aligned} d_t &= 0 & \text{khi } \epsilon_t < \epsilon_{cr} \\ d_t &= \frac{\sigma_{to} - \sigma_t}{\sigma_{to}} & \text{khi } \epsilon_t \geq \epsilon_{cr} \\ \epsilon_{cr} &= \frac{\sigma_{to}}{E_o} \end{aligned}$$

Biến dạng dẻo được xác định từ phương trình sau:

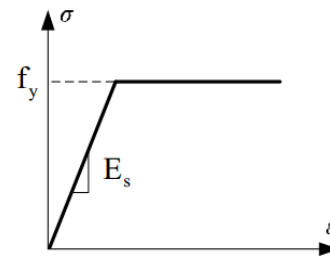
$$\tilde{\epsilon}_t^{pl} = \tilde{\epsilon}_t^{ck} - \frac{d_t}{(1 - d_t)} \frac{\sigma_{to}}{E_o}$$



Hình 2. Mô hình bê tông CDP dưới ứng suất kéo.

**Mô hình đàn dẻo của thép**

Mô hình đàn hồi dẻo được sử dụng để mô phỏng tính chất vật liệu của cốt thép, thể hiện như hình 3. Đường ứng suất - biến dạng của thép được xác định thông qua mô đun đàn hồi ( $E_s$ ) và cường độ chịu kéo ( $f_y$ ).

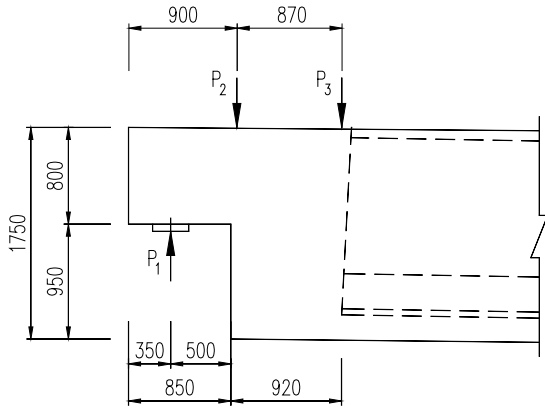


Hình 3. Mô hình ứng suất và biến dạng của cốt thép.

Một số tham số khác trong mô hình CDP được chọn như sau [7]: góc giãn nở là  $36^\circ$ , độ lệch tâm thế năng dòng chảy bằng 0,1 và tham số độ nhớt lấy bằng 0; tỷ số của cường độ trong trạng thái hai trục và cường độ trong trạng thái đơn trục,  $\sigma_{n0}/\sigma_{c0} = 1,16$  và tỷ lệ bất biến ứng suất thứ hai trên kinh tuyến kéo,  $k_c = 0,666$ .

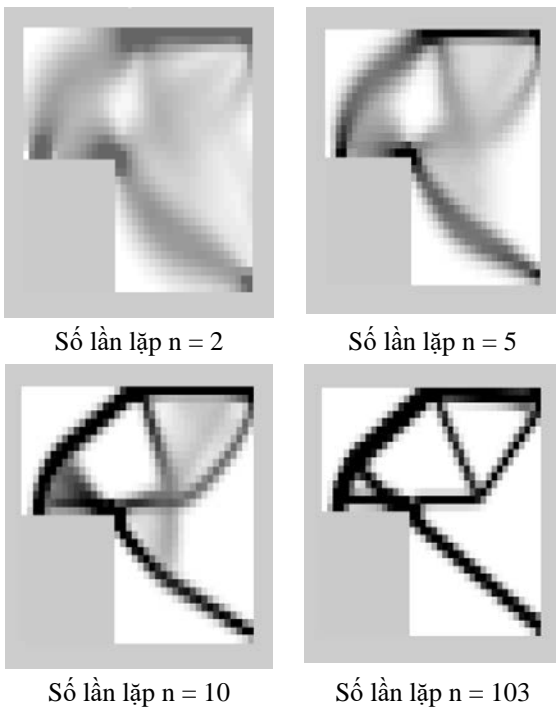
**4. Kết quả và thảo luận**

Tiến hành phân tích vùng D ở đầu dầm Super-T có cắt khác, vùng này thường phát sinh ứng suất nén và kéo cục bộ lớn gây nứt bê tông, với các thông số cơ bản như sau: cường độ bê tông  $f_c' = 40\text{MPa}$  và có các kích thước khu vực đầu dầm như hình 3. Sau khi tổ hợp tải trọng, phản lực tại gối dầm là  $P_1 = 1560\text{ KN}$ . Các tải trọng quy đổi thành các lực tập trung  $P_2 = 267\text{ KN}$  và  $P_3 = 44.7\text{ KN}$ .



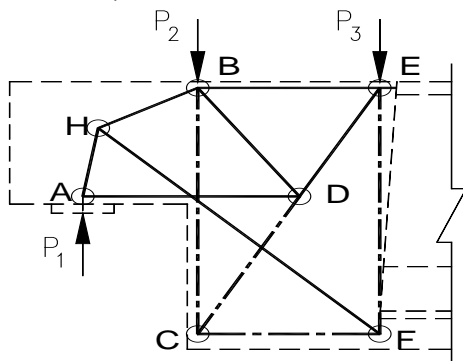
Hình 4. Sơ đồ đầu dầm Super-T.

Theo nghiên cứu trong [4], kết quả tối ưu Topology cho hệ giàn như hình 5.

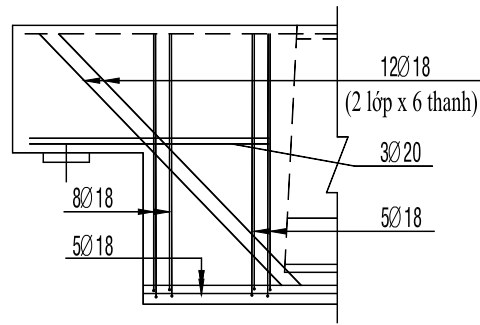


Hình 5. Kết quả tối ưu cho đầu dầm Super-T [4].

Dựa vào kết quả trên, mô hình hệ giàn được đề xuất như hình 6 và kết quả cốt thép như hình 7 [4]. Cụ thể, các thanh giằng được gia cường cốt thép với tổng diện tích  $8576 \text{ mm}^2$  và có  $5\phi 18$  làm thanh xiên.

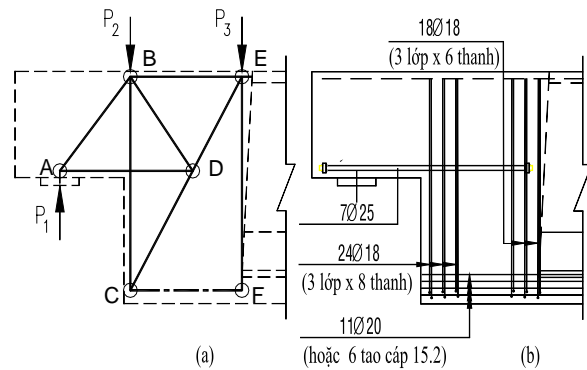


Hình 6. Thiết lập mô hình giàn ảo cho mô hình 1.



Hình 7. Bố trí thép cơ bản cho MH1.

Một mô hình giàn ảo khác đã được sử dụng phổ biến hiện nay để thiết kế đầu dầm [3], [5] sẽ được phân tích tiếp theo. Mô hình này được thể hiện trên hình 8a và cốt thép thu được từ hệ giàn này như hình 8b với tổng diện tích  $17579 \text{ mm}^2$ .

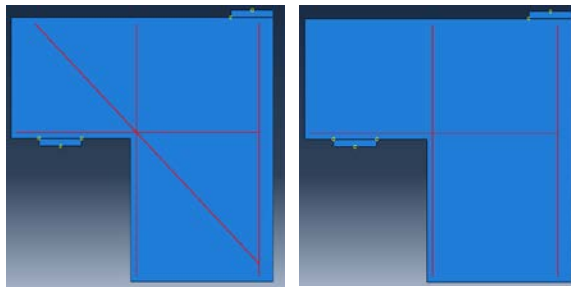


Hình 8. (a) Mô hình giàn ảo; (b) Bố trí thép cơ bản cho mô hình 2.

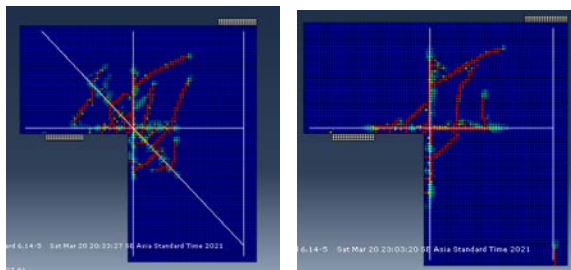
### Đánh giá các mô hình giàn STM bằng phương pháp phân tử hữu hạn

Tiến hành mô phỏng đầu dầm Super-T với trường hợp bố trí thép có thanh xiên được xác định từ hệ giàn STM theo thuật toán Topology gọi là mô hình 1 (MH1) như thể hiện trong hình 7, và trường hợp không có thanh xiên gọi là mô hình 2 (MH2) như hình 8 bằng phân tích phần tử hữu hạn thể hiện trong hình 9, trong đó: phần mô hình vật liệu như mục 3, kích thước lưới phần tử được sử dụng trong mô hình là  $20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$ . Phân tích sự hình thành vết nứt được thể hiện như hình 10. Từ đó cho thấy sự hình thành và phân bố vết nứt ở MH1 và 2 là tương đối khác nhau. MH1 cho thấy mật độ vết nứt nhiều hơn, phân bố trên diện tích rộng và dọc theo thanh thép xiên. Trong khi đó, mật độ vết nứt của MH2 ít hơn MH1 và vết nứt chính được hình thành thẳng góc với trục dầm. Kết quả này có thể thấy rằng tính dẻo dai của MH1 cao hơn MH2 do sự phân tán vết nứt, trong khi lượng thép

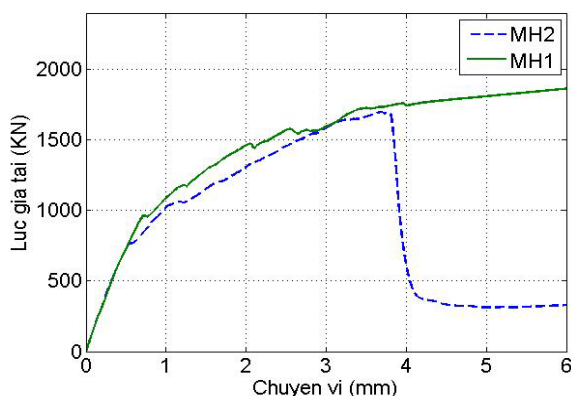
bố trí trong MH1 nhỏ hơn khoảng hai lần lượng thép bố trí trong MH2. Điều này cũng được khẳng định trên biểu đồ thể hiện khả năng chịu lực tới hạn và chuyển vị tương ứng của MH1 và MH2 như trong hình 11. Qua đó chỉ ra rằng khả năng chịu tải của MH1 và MH2 không chênh lệch đáng kể, tuy nhiên MH2 có xu hướng bị phá hoại đột ngột, trong khi đó MH1 xảy ra quá trình phá hoại dẻo, điều này cho thấy tính hợp lý của việc bố trí thép theo MH1, mặc dù lượng cốt thép được bố trí nhỏ hơn một nửa so với MH2.



Hình 9. Mô hình phần tử hữu hạn cho MH1 và MH2.



Hình 10. Kết quả phân bố vết nứt của mô hình phần tử hữu hạn CDP cho MH1 và MH2.



Hình 11. Mối quan hệ lực gia tải và chuyển vị của MH1 và MH2.

## 5. Kết luận

Bài báo đã phân tích đánh giá tính hợp lý các mô hình giàn STM trong trường hợp đầu dầm Super-T. Kết quả nghiên cứu cho thấy rằng việc lựa chọn mô hình giàn STM cho việc thiết kế vùng D rất quan trọng, nó ảnh hưởng đến cách thiết kế cốt thép cho kết cấu bê tông cốt thép, từ đó ảnh hưởng khả năng chịu lực của kết cấu một cách đáng kể. Dựa trên kết quả so sánh giữa hai mô hình có thể thấy rằng cách xây dựng mô hình giàn STM theo phương pháp tối ưu Topology với thuật toán mật độ cho kết quả hệ giàn khá hợp lý, qua đó nâng cao khả năng làm việc của kết cấu dầm bê tông cốt thép ở vùng D □

### Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Đức Thanh (2006), *Nghiên cứu áp dụng mô hình chống giằng trong thiết kế các kết cấu cầu bê tông cốt thép*, Đề tài nghiên cứu khoa học và phát triển công nghệ - Bộ Giao thông vận tải;
- [2] J. Schelaich, K. Schaefer (1991), *Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models*, Journal of Structural Engineering, V. 69;
- [3] B. T. Martin, D. H. Sanders (2007). *Verification and implementation of strut-and-tie model in LRFD Bridge Design Specifications*, National Cooperative Highway Research Program;
- [4] Mai Lựu (2016), *Tối ưu hóa mô hình giàn ảo bằng phương pháp mật độ*, Tạp chí KHCN GTVT số 20;
- [5] NguyễnViết Trung, Dương Tuấn Minh, Nguyễn Thị Tuyết Trinh (2005), *Tính toán kết cấu bê tông cốt thép theo mô hình giàn ảo*, NXB Xây dựng;
- [6] M. P. Bendsøe, O. Sigmund (2003), *Topology optimization – Theory, Methods and Applications*, Springer;
- [7] P. Kmieciak, M. Kamiński (2011), *Modelling of reinforced concrete structures and composite structures with concrete strength degradation taken into consideration*, Materials Science, V. 69;
- [8] Tiêu chuẩn thiết kế cầu TCVN 11823-2017;
- [9] Abaqus analysis user's manual (2017).

Ngày nhận bài: 06/04/2021

Ngày chuyển phản biện: 09/04/2021

Ngày hoàn thành sửa bài: 01/05/2021

Ngày chấp nhận đăng: 07/05/2021

Ngoài hình ảnh, bảng biểu đã chú thích nguồn từ tài liệu tham khảo, những hình ảnh, bảng biểu còn lại đều thuộc bản quyền của tác giả/nhóm tác giả.