

# PHÂN TÍCH NHIỆT THỦY HÓA XI MĂNG TRONG KẾT CẤU BÊ TÔNG MỚI ĐỔ DÙNG PHẦN TỬ HỮU HẠN HYBRID

## ANALYSIS OF HEAT INDUCED BY CEMENT HYDRATION IN EARLY- AGED CONCRETE STRUCTURES USING HYBRID FINITE ELEMENTS

<sup>1\*</sup>Phạm Tiến Cường, <sup>2</sup>Bùi Văn Ngọc

Trường Đại học Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh

\*cuong.pham@ut.edu.vn

**Tóm tắt:** Bài báo tập trung phát triển lời giải số dùng phần tử Hybrid cho bài toán truyền nhiệt trong kết cấu bê tông mới đổ, có kể đến nguồn nhiệt bên trong sinh ra bởi quá trình thủy hóa của xi măng (phản ứng giữa xi măng với nước). Mô hình toán học của bài toán dựa trên phương trình truyền nhiệt theo định luật Fourier. Sự truyền nhiệt giữa bê tông và môi trường bên ngoài thông qua các cơ chế đối lưu, bức xạ được kể đến trong mô hình bài toán. Nguồn nhiệt được mô hình dựa trên dạng định luật Arrhenius's law đối với phản ứng hóa học trong đó tính đến độ thủy hóa của xi măng. Trường nhiệt độ và độ thủy hóa là hai biến kiểm soát xấp xỉ trên miền phần tử, trong khi dòng nhiệt (heat flux) xấp xỉ trên biên phần tử (biên Dirichlet). Sự xấp xỉ nhiều biến đồng thời này tạo ra tên gọi "Hybrid". Đa thức xấp xỉ và hàm dạng là hoàn toàn độc lập. Các trường xấp xỉ không phụ thuộc lẫn nhau thông qua dạng và bậc đa thức. Kết quả của bài toán thu được với sự hội tụ cao khi dùng hệ lưới thô (số lượng phần tử rất thấp), trong khi linh hoạt được việc thay đổi bậc đa thức xấp xỉ. Bài toán áp dụng là một sàn bê tông cốt thép trên nền cọc nhồi với chiều dày 35 cm của nhà kho chứa sữa được lựa chọn phân tích với mô hình Hybrid. Lời giải Hybrid (nhiệt độ) với mô hình lưới thô (một phần tử) đạt được sự hội tụ đến kết quả đo, và có độ chính xác cao hơn lời giải tương ứng từ phần mềm Midas Civil khi dùng FEM thông thường. Sự khác biệt giữa nhiệt độ từ lời giải Hybrid và kết quả đo dưới 5%. Điều kiện biên được lời giải Hybrid mô hình rất tốt thông qua định luật Newton's cooling law áp dụng cho các biên đối lưu.

**Từ khóa:** Bê tông mới đổ, dòng nhiệt, độ thủy hóa, phần tử Hybrid.

**Mã phân loại:** 11.2

**Abstract:** The research focuses on developing a numerical solution using Hybrid elements for the heat transfer problem in early-aged concrete structures, taking into account the internal heat generated by the hydration of cement. The mathematical model of the problem is based on the heat transfer equation using Fourier's law. The heat transfer between concrete and the outside environment through convection and radiation modes is considered in the problem model. The heat source is modeled by a type of Arrhenius's law for chemical reactions, including the hydration degree of the cement. The temperature and hydration fields are the two-state variables that are approximated in the element domain, while the heat flux is chosen to approximate independently on its boundaries (Dirichlet boundaries). This simultaneous approximation gives rise to the name "Hybrid". A reinforced concrete floor on the ground is chosen for numerical analysis with the Hybrid solution. In the Hybrid solution, the temperature field used coarse mesh (single element) achieves the convergence to the measured results, and has higher accuracy than the corresponding solution obtained by Midas Civil software which uses conventional FEM. The difference between the temperature obtained by the Hybrid solution and the measured result is less than 5%. The boundary conditions are well modeled by the Hybrid formulation using Newton's cooling law applied to convective boundaries.

**Keywords:** Degree of cement hydration, Hybrid finite elements, early-aged concrete, heat flux.

**Classification code:** 11.2

### 1. Giới thiệu

Chưa có nhiều nghiên cứu trong việc sử dụng phần tử Hybrid cho bài toán phân tích nhiệt thủy hóa của kết cấu bê tông mới đổ, trong khi với phần tử hữu hạn (PTHH) thông thường (conventional elements) đã được dùng phổ biến cho bài toán này. Thế mạnh

của phần tử Hybrid là đa thức xấp xỉ với hàm dạng, có thể dùng hệ lưới thô, phần tử không cấu trúc v.v... được áp dụng rất phù hợp cho bài toán truyền nhiệt của kết cấu bê tông khi các trường nhiệt độ và độ thủy hóa được mô hình rất tốt so với kết quả đo cũng như kết quả của PTHH thông thường.

Tại Việt Nam, các nghiên cứu về sử dụng phần tử Hybrid cho phân tích nhiệt thủy hóa của kết cấu bê tông mới đổ chưa được công bố (trên các tạp chí chuyên ngành). Các quy định/ tiêu chuẩn liên quan đến nhiệt thủy hóa còn rất hạn chế dù đã có nhiều công trình bị nứt do nhiệt thủy hóa gây ra.

Mặc dù việc khống chế nhiệt độ trong bê tông khối lớn có được quy định trong TCXDVN 305:2004. Bê tông khối lớn – Quy phạm thi công và nghiệm thu [1] nhưng tiêu chuẩn không quy định về phương pháp phân tích thủy hóa, trong khi chỉ đưa ra một số điều kiện chung nhằm hạn chế nứt trong bê tông như phải khống chế nhiệt độ chênh lệch  $\Delta T \leq 20 \text{ }^\circ\text{C}$  và mô đun chênh nhiệt độ  $M_T \leq 50 \text{ }^\circ\text{C/m}$ . Để kiểm soát được nhiệt thủy hóa khối bê tông trong quá trình thi công phải đặt các thiết bị đo nhiệt độ tại nhiều vị trí khác nhau. Cách làm này thường gây tốn kém và phức tạp cho thi công.

So với FEM thì phần tử “Hybrid” được ra đời muộn hơn và đây là một dạng phần tử “nonconventional”. Phần tử Hybrid cũng đã được áp dụng khá nhiều trong các bài toán cơ học [2] - [5]. Phân tích bài toán truyền nhiệt dùng phần tử Hybrid được một số tác giả trong [6], [7] nghiên cứu tuy nhiên mới ở các dạng benchmark và chưa ứng dụng vào lĩnh vực xây dựng, đặc biệt là bài toán truyền nhiệt trong bê tông mới đổ với nguồn nhiệt do thủy hóa của xi măng tạo ra.

Do đó, lời giải bài toán truyền nhiệt trong bê tông mới đổ dùng phần tử Hybrid sẽ được xây dựng và phát triển, nhằm tận dụng các điểm mạnh của loại phần tử này, đồng thời để kiểm soát được các trường nhiệt độ và độ thủy hóa.

## 2. Mô hình toán học của bài toán truyền nhiệt có nguồn nhiệt do thủy hóa của xi măng

### 2.1. Các phương trình cơ bản

Phương trình dẫn nhiệt dựa trên nguyên lý bảo toàn năng lượng và định luật Fourier cho vật thể rắn (solid) có thể biểu diễn dưới dạng sau:

$$\nabla^T \sigma + c \dot{T} = \dot{Q} \text{ trong } V \quad (1)$$

$$\sigma = \nabla T \text{ trong } V \quad (2)$$

$$\sigma = -k \varepsilon \text{ trong } V \quad (3)$$

Trong các biểu thức trên:  $T$  là nhiệt độ;  $\nabla^T = \{ \partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z \}$  là Gradient vector;  $\sigma$  là vector dòng nhiệt (heat flow);  $c$  là nhiệt dung riêng thể tích,  $\dot{T}$  là độ biến thiên nhiệt độ (theo thời gian);  $\varepsilon$  là Gradient nhiệt độ;  $k$  là ma trận hệ số dẫn nhiệt (W/m/K).  $\dot{Q}$  là nguồn nhiệt (heat source) có đơn vị là  $W/m^3$ . Nguồn nhiệt được định nghĩa theo độ thủy hóa như sau:

$$\dot{Q}(t) = Q_\infty \dot{\alpha}(t) \quad (4)$$

Trong đó:  $\alpha$  là độ thủy hóa (cement hydration degree);  $Q_\infty$  là nhiệt thủy hóa cuối cùng (lớn nhất).

Tốc độ thủy hóa (the rate of cement hydration degree) được biểu diễn trên cơ sở của dạng định luật Arrhenius cho phản ứng hóa học của phản ứng thủy hóa xi măng, được viết dưới dạng:

$$\dot{\alpha} = A_T f(\alpha) \exp(-E_a/RT) \quad (5)$$

Trong đó:  $A_T$  là hằng số tốc độ phản ứng;  $E_a$  là năng lượng hoạt hóa của phản ứng thủy hóa (J/mol);  $R$  là hằng số universal gas,  $R = 8.314 \text{ J/mol/K}$  và  $f(\alpha)$  là “hàm thủy hóa” [8], [9] được xác định bằng thực nghiệm, thường thông qua một đường cong đầu vào của sự tăng nhiệt độ trong môi trường đoạn nhiệt. Hàm này có thể được xác định bằng một xấp xỉ tuyến tính hoặc bằng các xấp xỉ phi tuyến [9], ví dụ:

$$f(\alpha) = \left( \frac{\alpha}{k_1} \right)^{k_2} \left( \frac{1-\alpha}{1-k_1} \right)^{k_3} \quad (6)$$

Các tham số  $k_1$ ,  $k_2$  và  $k_3$  cần thỏa điều kiện  $k_1 k_3 = (1-k_1) k_2$ .

### 2.2. Điều kiện biên và điều kiện ban đầu

Điều kiện trên biên áp đặt dòng nhiệt  $\bar{q}(t, \mathbf{x})$  như sau:

$$\mathbf{n}^T \sigma = \bar{q} \text{ trên } \Gamma_q \quad (7)$$

Điều kiện trên biên đối lưu:

$$\mathbf{n}^T \sigma = h_c (T - T_a) \text{ trên } \Gamma_c \quad (8)$$

Điều kiện trên biên bức xạ và biên có bức xạ đồng thời với đối lưu:

$$\mathbf{n}^T \sigma = h_r (T^4 - T_a^4) \text{ trên } \Gamma_r \quad (9)$$

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = h_{cr} (T - T_a) \text{ trên } \Gamma_{cr} \quad (10)$$

Điều kiện trên biên tiếp xúc:

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = h_{cd} (T - T_k) \text{ trên } \Gamma_c \quad (11)$$

Trong các biểu thức trên:  $\mathbf{n}$  là vector pháp tuyến đơn vị (chỉ phương) của biên phần tử;  $T_a$  là nhiệt độ không khí;  $h_c, h_r, h_{cr}, h_{cd}$  lần lượt là các hệ số truyền nhiệt do đối lưu, bức xạ, đối lưu – bức xạ và do tiếp xúc;  $T_k$  là nhiệt độ trên biên tiếp xúc. Các điều kiện biên từ (7) đến (11) được gọi là điều kiện biên Neumann.

Điều kiện biên Dirichlet khi trên biên có áp đặt nhiệt độ  $\bar{T}(t, \mathbf{x})$  như sau:

$$T = \bar{T} \text{ trên } \Gamma_T \quad (12)$$

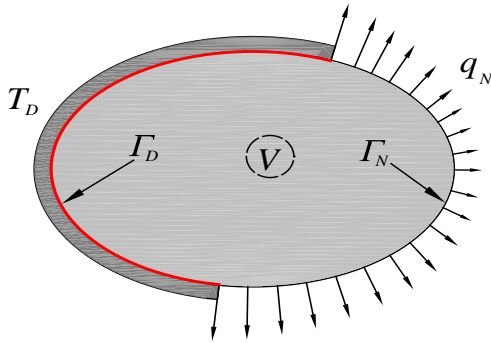
Điều kiện ban đầu của bài toán sẽ là:

$$T = T_0 \text{ at } t = t_0 \text{ trong } V \quad (13)$$

$$\alpha = \alpha_0 \text{ at } t = t_0 \text{ trong } V \quad (14)$$

Trong đó:  $T_0$  và  $\alpha_0$  lần lượt là giá trị của nhiệt độ và độ thủy hóa tại thời điểm ban đầu  $t_0$ .

### 3. Mô hình phần tử Hybrid của bài toán truyền nhiệt có nguồn nhiệt do thủy hóa của xi măng



Hình 1. Miền và biên của phần tử điển hình Hybrid.

Hình 1 biểu diễn một phần tử Hybrid trên đó có hai biên tổng quát, Dirichlet ( $\Gamma_D$ ) và Neumann ( $\Gamma_N$ ) tương ứng có áp đặt nhiệt độ ( $T_D$ ) và dòng nhiệt ( $q_N$ ), là các hàm có thể phụ thuộc theo không gian ( $x, y, z$ ) và thời gian ( $t$ ). Có thể biểu diễn điều kiện trên hai biên tổng quát như sau:

$$T = T_D \text{ trên } \Gamma_D \quad (15)$$

$$\mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} = q_N \text{ trên } \Gamma_N \quad (16)$$

Dạng yếu (weak form) của phương trình dẫn nhiệt (1) và điều kiện trên biên Dirichlet (15) được viết như sau:

$$\int \boldsymbol{\Theta}^T (\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + c \dot{T} - \dot{Q}) dV = 0 \quad (17)$$

$$\int \boldsymbol{\varphi}^T (T - T_D) d\Gamma_D = 0 \quad (18)$$

Trong (17) và (18):  $\boldsymbol{\Theta}$  và  $\boldsymbol{\varphi}$  lần lượt là các vector hàng tương ứng của cơ sở xấp xỉ (hàm thử) trên miền và biên xấp xỉ, có dạng:

$$\boldsymbol{\Theta} = \{ \Theta_1 \quad \Theta_2 \quad \dots \quad \Theta_j \quad \dots \quad \Theta_{N_v} \} \quad (19)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \{ \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_j \quad \dots \quad \varphi_{N_r} \} \quad (20)$$

Nhiệt độ và độ thủy hóa được xấp xỉ:

$$T = \boldsymbol{\Theta} \mathbf{T} \text{ trong } V \quad (21)$$

$$\alpha = \boldsymbol{\Theta} \boldsymbol{\alpha} \text{ trong } V \quad (22)$$

Trong (21) và (22):  $\mathbf{T}$  và  $\boldsymbol{\alpha}$  lần lượt là các vector cột đại diện cho biên độ của nhiệt độ và độ thủy hóa.

Các cơ sở xấp xỉ dùng đa thức Legendre có dạng:

$$\Theta_j(\xi, \eta, \zeta) = L_p(\xi) L_q(\eta) L_r(\zeta) \quad (23)$$

Phép xấp xỉ (22) được sử dụng để thiết lập dạng yếu (weak form) cho phương trình nguồn nhiệt thủy hóa như sau:

$$\int \boldsymbol{\Theta}^T Q_s \dot{\alpha} dV - \int \boldsymbol{\Theta}^T \left[ A_T f(\alpha) \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \right] dV = 0 \quad (24)$$

Đại lượng đầu tiên của dạng yếu (17) được tích phân từng phần để tạo các thành phần trên biên và sau đó sẽ áp đặt điều kiện biên trên đó:

$$-\int (\nabla \boldsymbol{\Theta})^T \boldsymbol{\sigma} dV + \int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma + \int \boldsymbol{\Theta}^T c \dot{T} dV - \int \boldsymbol{\Theta}^T \dot{Q} dV = 0 \quad (25)$$

Đại lượng liên quan đến điều kiện biên trong công thức (25) được chia theo hai biên thành phần là Neumann và Dirichlet của phần tử:

$$\int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = \int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_N + \int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_D \quad (26)$$

Xấp xỉ dòng nhiệt độc lập với các biến khác trên biên Dirichlet của phần tử một cách tổng quát được thể hiện:

$$q = \boldsymbol{\varphi} \mathbf{q} \text{ on } \Gamma_D \quad (27)$$

Khi đó (26) sẽ là:

$$\int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = \int \boldsymbol{\Theta}^T \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma_N + \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (28)$$

Với:

$$\mathbf{B} = \int \Theta^T \boldsymbol{\varphi} d\Gamma_D \quad (29)$$

Biên Neumann ( $\Gamma_N$ ) của phần tử được tách thành các biên thành phần mà trên đó có các điều kiện khác nhau: Biên đối lưu ( $\Gamma_c$ ), biên đối lưu-bức xạ ( $\Gamma_{cr}$ ), biên tiếp xúc ( $\Gamma_{cd}$ ) để thỏa mãn các điều kiện từ (7) đến (11). Khi đó biểu thức dạng yếu (25) trở thành:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \dot{\mathbf{T}} + (\mathbf{K} + \mathbf{C}) \mathbf{T} + \mathbf{B} \mathbf{q} \\ = \bar{\mathbf{Q}}_h + \bar{\mathbf{Q}}_k + \dot{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}}_q \end{aligned} \quad (30)$$

Các ma trận và vector trong (30) được tính như sau:

$$\mathbf{H} = \int \Theta^T c \Theta dV \quad (31)$$

$$\mathbf{K} = \int (\nabla \Theta)^T \mathbf{k} (\nabla \Theta) dV \quad (32)$$

$$\dot{\mathbf{Q}} = \int \Theta^T \dot{Q} dV \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \int \Theta^T h_c \Theta d\Gamma_c + \int \Theta^T h_{cr} \Theta d\Gamma_{cr} \\ + \int \Theta^T h_{cd} \Theta d\Gamma_{cd} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_h = \int \Theta^T h_c T_a d\Gamma_c + \int \Theta^T h_{cr} T_a d\Gamma_{cr} \\ + \int \Theta^T h_r (T_a^4 - T^4) d\Gamma_r \end{aligned} \quad (35)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_k = \int \Theta^T h_{cd} T_k d\Gamma_{cd} \quad (36)$$

$$\bar{\mathbf{Q}}_q = \int \Theta^T \bar{q} d\Gamma_q \quad (37)$$

Điều kiện về tương thích (liên tục) trên biên Dirichlet (18) có thể viết thành:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{T} = \int \boldsymbol{\varphi}^T T_D d\Gamma_D \quad (38)$$

Vế phải của (38) được tách thành các biên thành phần mà trên đó có dòng nhiệt hoặc biên “cản nhiệt”, dẫn đến:

$$\mathbf{B}^T \mathbf{T} - \mathbf{R}_{rs} \mathbf{q} = \bar{\mathbf{T}}_T + \mathbf{R}_k \quad (39)$$

Trong đó:

$$\mathbf{R}_{rs} = \int \boldsymbol{\varphi}^T h_{rs} \boldsymbol{\varphi} d\Gamma_{rs} \quad (40)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_T = \int \boldsymbol{\varphi}^T \bar{T} d\Gamma_T \quad (41)$$

$$\mathbf{R}_k = \int \boldsymbol{\varphi}^T T_k d\Gamma_i + \int \boldsymbol{\varphi}^T T_k d\Gamma_{rs} \quad (42)$$

Điều kiện (24) được viết thành:

$$\mathbf{Q}_\alpha \dot{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{A}_\alpha \quad (43)$$

Với,

$$\mathbf{Q}_\alpha = \int \Theta^T Q_\infty \Theta dV \quad (44)$$

$$\mathbf{A}_\alpha = \int \Theta^T \left[ A_r f(\alpha) \exp\left(\frac{-E_a}{RT}\right) \right] dV \quad (45)$$

#### 4. Hệ phương trình tuyến tính Hybrid và sơ đồ đồ thuật toán giải bài toán phi tuyến

Hệ phương trình để giải được xây dựng từ hai phương trình đã lập, (30) và (39) để tìm lời giải nhiệt độ và dòng nhiệt, kết hợp với phương trình (43) để xác định thủy hóa. Các phương trình này là phi tuyến theo cả không gian và thời gian nên cần sử dụng phương pháp phù hợp để giải. Để rời rạc theo thời gian thì quy luật hình thang và phương pháp Crank-Nicolson được áp dụng. Sau đó sử dụng phương pháp Newton-Raphson để tuyến tính hóa hệ phương trình phi tuyến đã nêu trên, dẫn đến hệ phương trình tuyến tính có ẩn số là nhiệt độ, dòng nhiệt và độ thủy hóa tương ứng với từng time step như sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & -\mathbf{R}_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^n \\ \tilde{\mathbf{q}}^n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}'_e - \mathbf{R}_e \\ \mathbf{R}'_c - \mathbf{R}_c \end{Bmatrix} \quad (46)$$

$$\mathbf{Q}_\alpha \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^n = \mathbf{Q}'_h \tilde{\mathbf{T}}^n + \mathbf{R}_\alpha \quad (47)$$

Hệ ba phương trình (46) và (47) được giải bằng chương trình máy tính (supporting program – Fortran language) theo trình tự thể hiện trên sơ đồ hình 2.

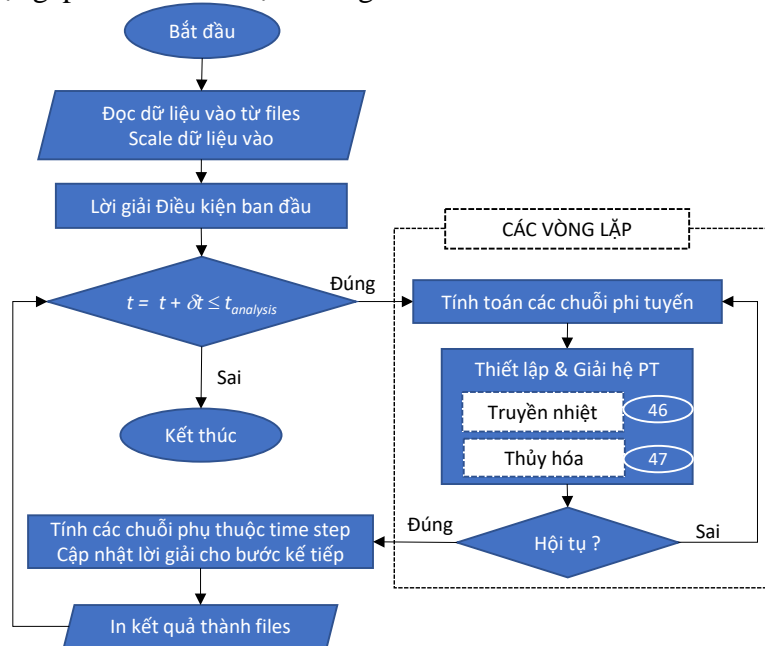
#### 5. Áp dụng

Ứng xử nhiệt thủy hóa của bê tông mới đổ dùng phần tử Hybrid sẽ được thể hiện trong một ví dụ khi phân tích trường nhiệt độ cho kết cấu sàn trên nền cọc của một nhà kho kết cấu thép chức năng phức hợp kích thước trên mặt bằng, 143 m dài × rộng 41 m và chiều dày là 0.35 m, được xây dựng tại Porto, Bồ Đào Nha vào 2003 như hình 3. Bài toán này đã được phân tích tại [10] với phần tử hữu hạn thông thường bằng phần mềm DIANA. Để kiểm soát nhiệt độ và biến dạng, các sensors đo nhiệt độ (hình 4a) và biến dạng theo hai phương được bố trí tại dải thi công đổ bê tông vào ngày 07/04/2003 (hình 4b). Sensor kiểm soát nhiệt độ được bố trí cách mặt trên (điểm M<sub>1</sub>) và dưới (điểm M<sub>2</sub>) của sàn lần lượt là 50 mm như hình 5. Vị trí kiểm soát nhiệt độ nằm tại phân khu đổ bê tông ngày 07/04/2003.

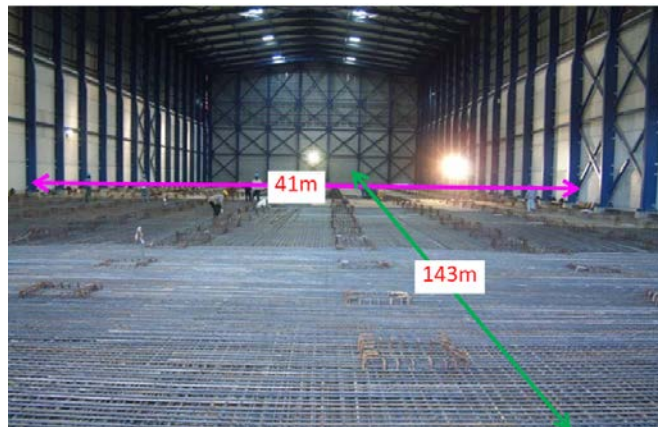
Lời giải phần tử Hybrid nhằm phân tích trường nhiệt độ tại các điểm kiểm soát (trùng các vị trí đo) do thủy hóa và ảnh hưởng bởi điều kiện môi trường (đối lưu trên bề mặt

sàn). Lời giải Hybrid sẽ được so sánh với giá trị tương ứng đo được và giá trị khi dùng phần mềm sử dụng phần tử hữu hạn thông

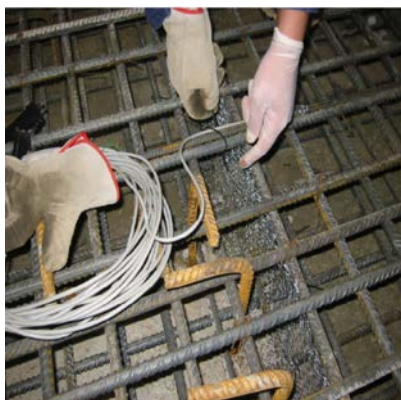
thường (FEM), ở nghiên cứu này tác giả dùng phần mềm Midas Civil.



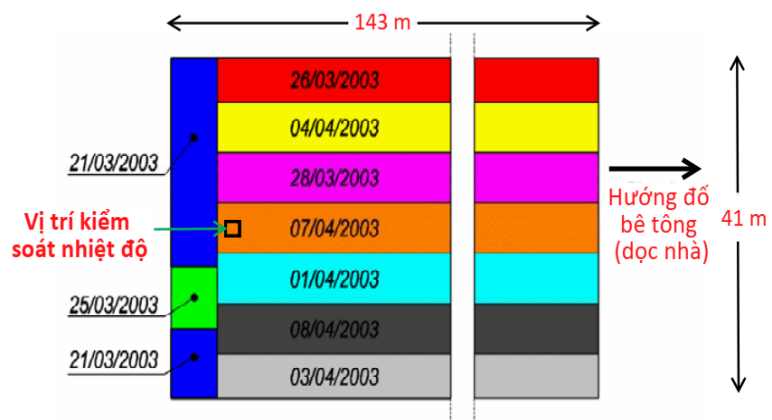
Hình 2. Sơ đồ phân tích nhiệt thủy hóa bê tông mới đổ của lời giải PTHH Hybrid.



Hình 3. Sàn của kho chứa sữa [10].

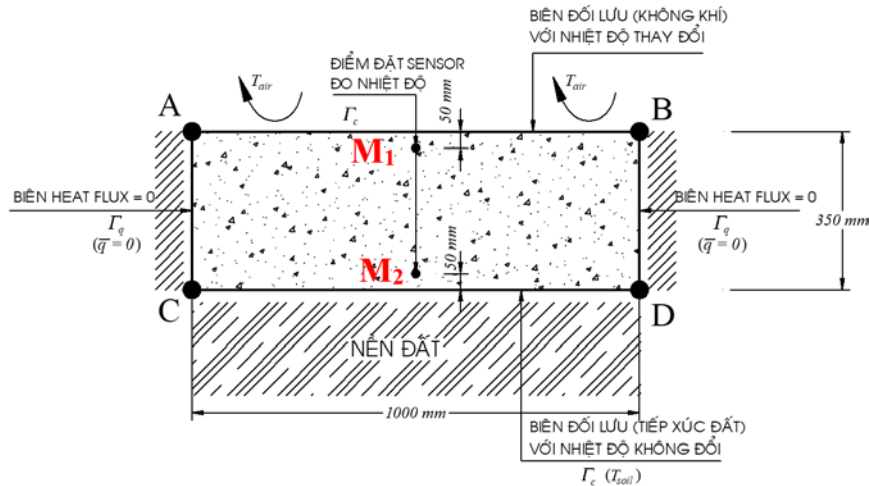


(a) Thi công lắp đặt sensor đo nhiệt độ sát mặt trên của sàn.



(b) Phân khu và hướng đổ bê tông.

Hình 4. Lắp đặt sensor, phân khu vực và tiến độ đổ bê tông sàn [11].



Hình 5. Điều kiện biên và mô hình phần tử Hybrid.

**Lựa chọn mô hình phân tích dùng phần tử Hybrid:** Kích thước sàn theo hai phương ngang và dọc khá lớn 41 m × 143 m trong khi chiều dày sàn là 0.35 m, do đó có thể mô phỏng bài toán theo mô hình 2D, tức sự truyền nhiệt với môi trường chủ yếu thông qua mặt trên và mặt dưới của sàn (xem nhiệt độ không đổi theo không gian trên hai phương ngang và dọc). Mặt trên sàn tiếp xúc với không khí trong khi mặt dưới tiếp xúc với đất. Mô hình bài toán phẳng có một phần tử dạng chữ nhật với kích thước phần tử Hybrid là 1.00 m × 0.35 m, được thể hiện tại hình 5.

**Điều kiện biên và điều kiện ban đầu:** Hình 5 thể hiện điều kiện biên của bài toán. Mặt trên của sàn tiếp xúc với không khí ở nhiệt độ thay đổi có hệ số đối lưu  $h_c = 7.5 \text{ W/m}^2/\text{K}$ , trong khi mặt dưới tiếp xúc với nền đất ở nhiệt độ được xem là không đổi ( $T_{soil} = 17 \text{ }^\circ\text{C}$ ) có hệ số đối lưu  $h_c = 4.5 \text{ W/m}^2/\text{K}$ . Hai mặt bên (cạnh AC và BD) áp đặt điều kiện adiabatic (đoạn nhiệt) với  $\bar{q} = 0$ . Nhiệt độ ban đầu trong bê tông:  $T_0 = 15.0 \text{ }^\circ\text{C}$ . Độ thủy hóa ban đầu:  $\alpha_0 = 0.05$ . Nguồn nhiệt thủy hóa được xác định từ phương trình nhiệt độ - thời gian trong điều kiện đoạn nhiệt,  $T_{adia} = 14 + 47 \times (1 - e^{-1.5x})$ .

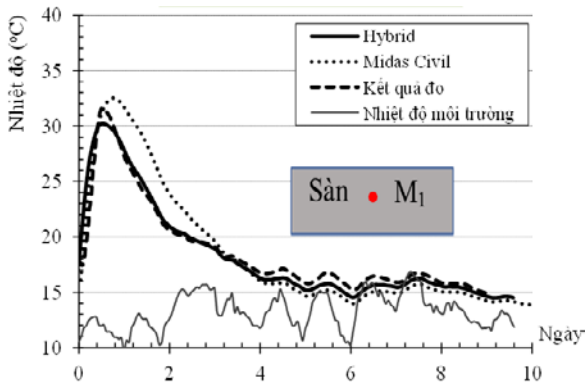
Các thông số khác của bài toán được lấy như sau:  $Q_\infty = 0.3929 \text{ MJ/kg}$ ;  $c_c = 285 \text{ kg/m}^3$ ;  $A_T = 0.7189 \text{ GW/kg}$ ;  $E_a = 50 \text{ kJ/mol}$ ;  $R = 8.314 \text{ J/mol/K}$ ;  $k = 2.6 \text{ W/m/K}$ . Hàm thủy hóa  $f(\alpha)$  được chuẩn hóa (normalization).

Lời giải Hybrid áp dụng với chỉ **01 phần tử 04 nút** với bậc đa thức xấp xỉ  $(d_\xi, d_\eta) = (0, 7)$ , tức là hằng số theo phương ngang và bậc 7 theo phương đứng (theo phương chiều dày sàn), khi đó véc tơ cơ sở xấp xỉ có kích thước  $N_v = (0+1)(7+1) = 8$ . Véc tơ cơ sở xấp xỉ nhiệt độ ( $T$ ) và độ thủy hóa ( $\alpha$ ) của phần tử Hybrid như sau (sử dụng đa thức Legendre):

$$\Theta(\xi, \eta) = \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \\ \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) \\ \frac{1}{2}(5\eta^3 - 3\eta) \\ \frac{1}{8}(35\eta^4 - 30\eta^2 + 3) \\ \frac{1}{8}(63\eta^5 - 70\eta^3 + 15\eta) \\ \frac{1}{16}(231\eta^6 - 315\eta^4 + 105\eta^2 - 5) \\ \frac{1}{16}(429\eta^7 - 693\eta^5 + 315\eta^3 - 35\eta) \end{Bmatrix}^T$$

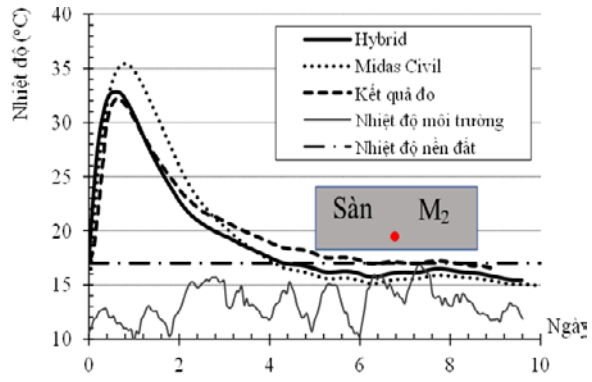
Sự hội tụ của bài toán được kiểm soát trong chương trình máy tính khi giải phương trình phi tuyến theo Newton-Raphson (đã được tuyến tính hóa) cho các hệ (46) và (47). Nhiệt độ và độ thủy hóa tại các increment cho mỗi time step được đánh giá theo chuẩn về độ lệch có dạng:  $|T^{n+1} - T^n| \leq Tol$  ( $\sim 10^{-8}$ ), với  $n$  là bước lặp. Kết quả nhiệt độ của lời giải Hybrid được so sánh với kết quả tương ứng khi đo và lời giải khi dùng phần mềm Midas Civil cho hai điểm kiểm soát  $M_1$  và  $M_2$  được thể hiện trên hình 6 và hình 7. Từ kết quả so sánh của các lời giải khác nhau và kết quả đo có thể nói rằng, nhiệt thu được từ lời giải dùng phần tử Hybrid sát với kết quả đo hơn so với kết quả của FEM khi dùng Midas

Civil. Nhiệt độ lớn nhất tại điểm  $M_1$  là xấp xỉ  $30^\circ\text{C}$  ở thời điểm 13 giờ tính từ lúc đổ bê tông, gần trùng thời điểm đạt giá trị nhiệt độ của kết quả đo. Nhiệt độ tại  $M_1$  biến thiên theo thời gian và phản ánh khá rõ sự ảnh hưởng của nhiệt độ môi trường trên biên này (biên có cạnh AB, biên đối lưu với không khí có nhiệt độ không khí thay đổi khá nhiều). Như vậy có thể kết luận rằng, công thức Hybrid đã mô hình rất tốt điều kiện biên đối lưu (biên Robin). Nhiệt độ tại  $M_2$  có giá trị

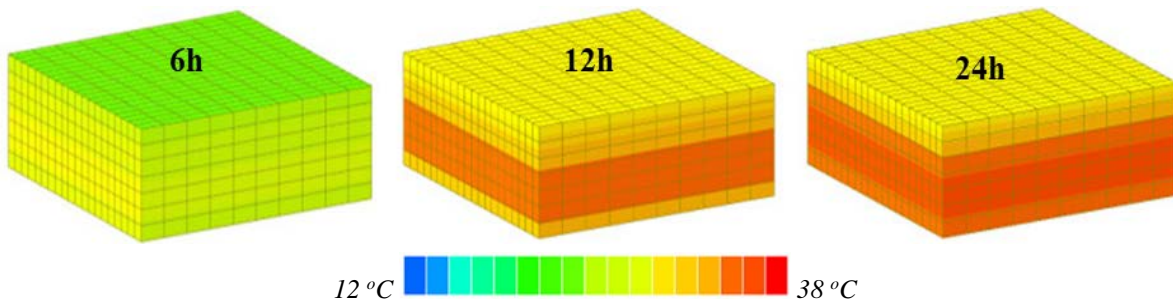


Hình 6. Sự thay đổi nhiệt độ tại điểm  $M_1$ .

lớn nhất xấp xỉ  $32.8^\circ\text{C}$  tại thời điểm 14 giờ. Sự dao động (lên xuống) của nhiệt độ tại  $M_2$  cũng ít hơn so với tại  $M_1$  vì nhiệt độ trong nền đất không đổi ( $17^\circ\text{C}$ ). Giá trị nhiệt độ lớn nhất và thời điểm đạt nhiệt độ cao nhất tại  $M_2$  cũng gần trùng với kết quả đo, chênh lệch giữa hai kết quả chưa đến 2%. Sự thay đổi nhiệt độ theo thời gian tại ba thời điểm trong khối bê tông (dạng 3D - solid) được thể hiện trên hình 8 cho thấy sự ảnh hưởng của điều kiện biên.



Hình 7. Sự thay đổi nhiệt độ tại điểm  $M_2$ .



Hình 8. Biến thiên của nhiệt độ theo chiều dày sàn theo thời gian (bằng Midas Civil).

## 6. Kết luận

Lời giải số cho bài toán truyền nhiệt trong bê tông mới đổ có kể đến nguồn nhiệt tạo ra do thủy hóa của xi măng và trao đổi nhiệt trông qua các điều kiện biên đã được xây dựng thành công khi dùng phần tử Hybrid. Trường nhiệt độ và độ thủy hóa được xấp xỉ trên miền của bài toán, trong khi dòng nhiệt được xấp xỉ đồng thời và độc lập trên biên Dirichlet để tạo ra công thức “Hybrid”. Điểm mạnh của phần tử Hybrid đã được khai thác khi dùng lưới thô (ít phần tử) và khả năng linh hoạt trong việc tăng bậc của đa thức xấp xỉ mà không phụ thuộc vào hàm dạng. Trường nhiệt độ kiểm soát khi dùng lời giải Hybrid trong ví dụ áp dụng được so sánh

với kết quả đo và lời giải số của phần mềm Midas Civil cho thấy sự hội tụ rất tốt của công thức Hybrid khi chỉ dùng một phần tử kết hợp với bậc 7 cho đa thức xấp xỉ □

## Tài liệu tham khảo

- [1] Bộ Xây dựng (2004), *TCXDVN 305: 2004. Bê tông khối lớn – Quy phạm thi công và nghiệm thu*;
- [2] Franco Brezzi and Michel Fortin (1991), *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 15, Springer-Verlag.
- [3] H.T. Chen and S.M. Chang (1990), *Application of the hybrid method to inverse heat conduction problems*. International Journal of Heat and Mass Transfer, **33**(4): p. 621-628;
- [4] Theodore H. H. Pian and Mingsang Li (1990), *Stress Analysis of Laminated Composites by*

- Hybrid Finite Elements*, in *Discretization Methods in Structural Mechanics*, G. Kuhn and H. Mang, Editors, Springer Berlin Heidelberg, p. 363-372;
- [5] J. A. Teixeira de Freitas, J. P. Moitinho de Almeida and E. M. B. Ribeiro Pereira (1999), *Non-conventional formulations for the finite element method*, Computational Mechanics, **23**(5): p. 488-501;
- [6] M. Farhloul and A. Serghini Mounim (2005), *A mixed-hybrid finite element method for convection–diffusion problems*, applied Mathematics and Computation, **171**(2): p. 1037-1047;
- [7] J. Jirousek and Q. H. Qin (1996), *Application of hybrid-Trefftz element approach to transient heat conduction analysis*, Computers & Structures, **58**(1): p. 195-201.
- [8] M. Azenha (2009), *Numerical Simulation of The Structural Behaviour of Concrete Since Its Early Ages*, in *Faculty of Engineering.*, University of Porto: Porto. p. 375.
- [9] J.A.T Freitas, P.T. Cuong, Rui Faria and Miguel Azenha (2013), *Modelling of cement hydration in concrete structures with hybrid finite elements*, Finite Elements in Analysis and Design, **77**(0): p. 16-30;
- [10] Rui Faria, Miguel Azenha and Joaquim A. Figueiras (2006), *Modelling of concrete at early ages: Application to an externally restrained slab*. Cement and Concrete Composites, **28**(6): p. 572-585;
- [11] M. Azenha (2004), *Behaviour of concrete at early ages. Phenomenology and thermo-mechanical analysis (in Portuguese)*, in *Faculty of Engineering*, University of Porto. p. 248.

**Lời cảm ơn:** Kết quả trình bày là một phần của đề tài cấp Trường mang mã số KH 1916 do Trường Đại học GTVT TP. HCM hỗ trợ kinh phí. Nhóm tác giả trân trọng cảm ơn sự hỗ trợ của Nhà trường, phòng Khoa học công nghệ và Nghiên cứu phát triển.

**Ngày nhận bài:** 29/06/2021

**Ngày chuyển phản biện:** 02/07/2021

**Ngày hoàn thành sửa bài:** 23/07/2021

**Ngày chấp nhận đăng:** 30/07/2021