

# Mô phỏng sự lan truyền độ ẩm trong vật liệu gỗ bằng phương pháp sai phân hữu hạn

## Modelisation of moisture diffusion in wood by finite difference method

Nguyễn Tuấn Anh

Nhóm nghiên cứu Khoa học công nghệ ứng dụng cho sự Phát triển bền vững (STASD), Trường Đại học Giao thông vận tải Thành phố Hồ Chí Minh

Email liên hệ: tuananh.nguyen@ut.edu.vn

### Tóm tắt:

Gỗ là loại vật liệu hút ẩm, độ ẩm đóng vai trò quan trọng đến độ bền và tuổi thọ của kết cấu gỗ. Dự báo sự lan truyền độ ẩm trong các kết cấu gỗ là hết sức cần thiết nhằm tránh ảnh hưởng đến khả năng chịu lực cũng như hạn chế sự xâm nhập của các yếu tố sinh học như nấm mốc, mối mọt gây hư hỏng kết cấu. Nhiều phương pháp được sử dụng để mô phỏng sự lan truyền độ ẩm trong kết cấu gỗ. Phương pháp sai phân hữu hạn là một phương pháp thể hiện được sự ưu việt trong các bài toán truyền ẩm một hoặc hai chiều về thời gian xử lý nhưng vẫn đảm bảo tính chính xác. Bài báo áp dụng phương pháp sai phân hữu hạn để mô phỏng sự lan truyền ẩm một phương trong kết cấu gỗ, mô hình bằng phần mềm VBA. Mô hình đã được kiểm chứng sự chính xác bằng sự so sánh với phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn.

**Từ khóa:** Sai phân hữu hạn; truyền ẩm; vật liệu gỗ; VBA.

### Abstract:

Wood is a hygroscopic material, the service life and the durability of wooden structures is closely related to the moisture content. Forecasting the moisture diffusion in wood structures is significant to avoid affecting the bearing capacity and limiting the biological attack such as mold, termites causing structural damage. Various methods are used to simulate the diffusion of moisture in wood structures. The finite difference method shows its superiority in 1 or 2-dimensional moisture diffusion modelisation in terms of processing time as well as accuracy. The paper applies the finite difference method to simulate the unidirectional moisture diffusion in wood structures, modeled by VBA software. The finite difference model is verified by the comparison of the analytical method and the finite element method.

**Keywords:** Finite difference method; moisture diffusion; wood structures; VBA.

### 1. Giới thiệu

Gỗ là một loại vật liệu xây dựng tự nhiên. Nhiều tính chất cơ lý của gỗ phụ thuộc vào độ ẩm của nó [1][2]. Qua khảo sát 245 dầm gỗ nhịp lớn, nhận thấy rằng hầu hết các hư hỏng đều bắt nguồn từ độ ẩm [3].

Độ ẩm  $w$  (%) của gỗ được định nghĩa là tỉ số giữa khối lượng nước và khối lượng gỗ đã sấy khô của một mẫu thử gỗ:

$$w = \frac{m_w}{m_0} = \frac{m_t - m_0}{m_0} \quad (1)$$

Trong đó:

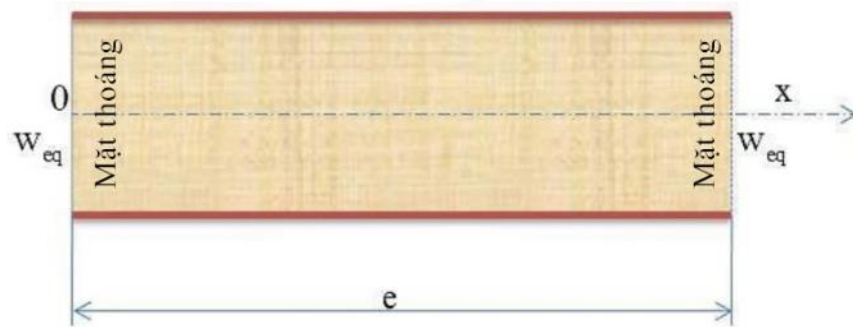
- $m_w$ : Khối lượng nước (g);
- $m_0$ : Khối lượng gỗ sấy khô (g);
- $m_t$ : Khối lượng tổng (g).

Độ ẩm tương đối là độ ẩm môi trường xung quanh, thường được ký hiệu là  $HR$  (%). Một khi gỗ để ở một nhiệt độ và độ ẩm tương đối không đổi và đạt được trạng thái độ ẩm cân bằng  $w_{eq}$ .

Bắt đầu từ trạng thái đó, gỗ không hút ẩm cũng như không mất độ ẩm.

Sự lan truyền ẩm là hiện tượng nước trong gỗ được dịch chuyển từ vùng gỗ có độ ẩm lớn đến vùng có độ ẩm thấp hơn. Quá trình truyền ẩm có thể định nghĩa thông qua định luật Fick[4], trong điều kiện cân bằng nhiệt, định luật được viết dạng tổng quát như sau:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \underline{D}(w) \nabla (w) \quad (2)$$



**Hình 1.** Mô hình truyền ẩm theo chiều dọc của mẫu.

Tính phi tuyến của bài toán được thể hiện ở hệ số truyền ẩm của mẫu thay đổi theo độ ẩm. Định luật Fick được diễn giải theo sự truyền ẩm một chiều như sau:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D_0 \exp(kw) \left[ k \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3)$$

Trong đó:

- $D_0$ : Hệ số truyền ẩm của vật liệu gỗ ở trạng thái khô ( $m^2/s$ );
- $k$ : Hệ số phi tuyến.

Ở bề mặt thoáng, nếu sức kháng truyền ẩm mặt ngoài coi như không đáng kể, điều kiện biên được thể hiện như sau:

$$w_{surf} = w_{eq} \quad (4)$$

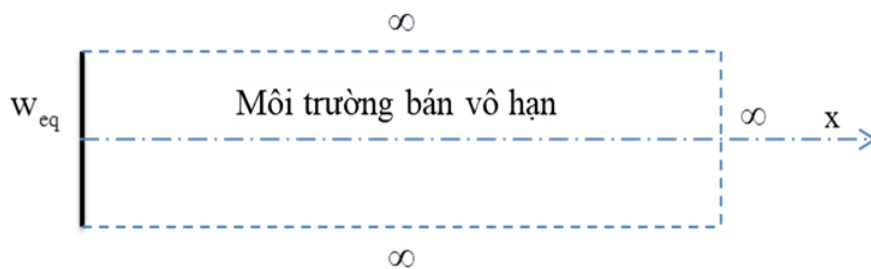
Ngược lại, nếu như xét đến sức kháng mặt ngoài, điều kiện biên trở thành [5]:

$$D \frac{\partial w}{\partial x} = \pm S(w_{surf} - w_{eq}) \quad (5)$$

Trong đó:

- $D$ : Hệ số truyền ẩm ( $m^2/s$ );
- $S$ : Hệ số trao đổi ẩm ở bề mặt ( $m/s$ );
- $w_{surf}$ : Độ ẩm tại bề mặt.

Trong bài toán truyền ẩm tuyến tính trong môi trường bán vô hạn (hình 2), sự truyền ẩm có thể được xác định thông qua phương pháp giải tích, dựa trên mô hình bài toán truyền nhiệt.



**Hình 2.** Giả thiết của phương pháp giải tích.

Độ ẩm tại trí  $i$  tại thời điểm  $t$  được tính theo công thức (6):

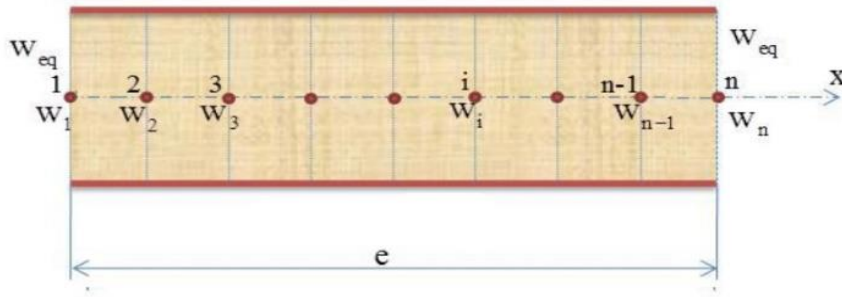
$$\frac{w_i^t - w_{eq}}{w_{ini} - w_{eq}} = \text{erf}\left(\frac{x\sqrt{D}}{2\sqrt{t}}\right) + \exp\left(\frac{Sx}{D} + \frac{S^2t}{D^3}\right) \times \text{erfc}\left(\frac{x\sqrt{D}}{2\sqrt{t}} + \frac{St}{\sqrt{D}}\right) \quad (6)$$

Với  $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int \exp(-x)^2 dx = 1 - \text{erfc}(x)$

## 2. Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn cho bài toán truyền ẩm

Trong các bài toán một hoặc hai chiều, phương pháp sai phân hữu hạn [6][7] là phương pháp thực hiện nhanh và hữu hiệu để mô phỏng quá trình lan truyền ẩm.

Mẫu A được chia thành các phần có bề dày  $\Delta x$ , vuông góc với trục  $x$ , mỗi điểm mang một giá trị của độ ẩm  $w_i$ . Trong bài toán truyền ẩm một chiều, mỗi điểm thể hiện giá trị độ ẩm đồng nhất của từng nửa phần được chia.



**Hình 3.** Chia lưới theo phương pháp sai phân hữu hạn.

Gọi  $w_i^t$  là độ ẩm của điểm  $i$  tại thời điểm  $t$ . Ở bên trong mẫu, độ ẩm của thời điểm tiếp theo  $t+\tau$  được tính như sau:

$$w_i^{t+\tau} = \left(1 - \frac{2}{M}\right) w_i^t + \frac{1}{4M} \times \left[ k(w_{i+1}^t - w_{i-1}^t)^2 + 4(w_{i+1}^t + w_{i-1}^t) \right] \quad (7)$$

Với  $M = \frac{\Delta x^2}{D_0 \tau \exp(kW_i^t)}$

Ở bề mặt thoáng, có hai giả thuyết được xét đến. Trong điều kiện biên có xét đến sức kháng truyền ẩm. Độ ẩm được thể hiện dưới dạng:

$$w_n^{t+\tau} = \frac{2}{M} w_{n-1}^t + \left(1 - \frac{2}{M} - \frac{2}{N}\right) w_n^t + \frac{2}{N} w_{eq} \quad (8)$$

Với  $N = \frac{\Delta x}{S\tau}$

Trong trường hợp sức kháng truyền ẩm bề mặt được bỏ qua. Độ ẩm bề mặt được tính theo:

$$w_n^t = w_{eq} \quad (9)$$

Trong bài toán truyền ẩm đối xứng, nghĩa là hai bề mặt thoáng của mẫu thử đều đặt ở cùng

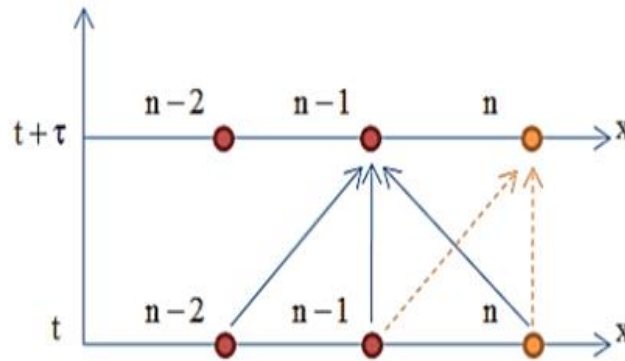
điều kiện bên ngoài (nhiệt độ, độ ẩm), có cùng một hệ số trao đổi độ ẩm ở bề mặt  $S$ , xét một nửa bề dày mẫu, độ ẩm ở phần trong được tính:

$$W_1^{t+\tau} = \left(1 - \frac{2}{M}\right) W_1^t + \frac{2}{M} W_2^t \quad (10)$$

Trong trường hợp chỉ một mặt được đặt ở bề mặt thoáng, hệ số trao đổi bề mặt ở mặt phủ kín được xem như bằng không, công thức tính của độ ẩm được trình bày như sau:

$$w_n^{t+\tau} = \frac{2}{M} w_{n-1}^t + \left(1 - \frac{2}{M}\right) w_n^t \quad (11)$$

Sơ đồ tính sự phân bố ẩm theo phương pháp Explicit Euler [8] trong mẫu được thể hiện ở hình 4. Biết được độ ẩm ở thời điểm  $t$ , có thể dự báo được độ ẩm ở thời điểm  $t+\tau$ . Như vậy, nếu điều kiện phân bố ẩm ở thời điểm ban đầu  $t = 0$  biết trước, có thể tính toán được độ ẩm ở mỗi điểm ở thời điểm  $\tau$  sau đó. Quá trình tính toán lặp lại cho phép xác định được sự phân bố độ ẩm tại một thời điểm bất kỳ.



**Hình 4.** Sơ đồ tính sự phân bố ẩm.

So với phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp tính theo sơ đồ của phương pháp sai phân hữu hạn cho phép đơn giản hóa việc lập trình và quá trình tính toán được giảm xuống đáng kể. Đối với phương pháp sai phân hữu hạn, một trong các tiêu chí quan trọng cần được xét đến là điều kiện hội tụ. Sự hội tụ của bài toán không đảm bảo được một kết quả chính xác, tuy nhiên là điều kiện để đảm bảo mô hình hoạt động được, các bước chia theo không gian và thời gian phải thỏa mãn tiêu chí hội tụ, bao gồm:

**Điều kiện truyền ẩm**

Đây là điều kiện đầu tiên, liên quan đến hệ số truyền ẩm, để đảm bảo tiêu chí chặt chẽ tất cả các thành phần của phương trình (7) đều phải đảm bảo điều kiện dương. Điều kiện trở thành:

$$1 - \frac{2}{M} \geq 0 \tag{12}$$

Đây là điều kiện tiêu chuẩn của phương pháp sai phân hữu hạn, tiêu chuẩn hội tụ tương đương với:

$$\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2D_0 \exp(kw_i^t)} \tag{13}$$

**Điều kiện biên**

Đây là điều kiện thứ hai, liên quan đến hệ số truyền ẩm và hệ số trao đổi bề mặt. Từ phương trình (8), điều kiện hội tụ tương đương:

$$1 - \frac{2}{M} - \frac{2}{N} \geq 0 \tag{14}$$

Nghĩa là:

$$\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2(D_0 \exp(kw_n^t) + S\Delta x)} \tag{15}$$

Đối với điều kiện biên, lựa chọn các bước chia lưới phần tử cũng như lựa chọn bước chia thời gian không những phụ thuộc vào hệ số truyền ẩm  $D$  còn phụ thuộc hệ số trao đổi ẩm ở bề mặt  $S$ .

Như vậy, đối với trường hợp bỏ qua sức kháng bề mặt, điều kiện hội tụ được tính theo phương trình (13). Ngược lại, đối với trường hợp có xét đến sức kháng bề mặt, tiêu chí hội tụ phải thỏa mãn cả hai phương trình (13) và (15). Trong trường hợp này, tiêu chí được chọn là phương trình (16) với  $w_{max}$  là độ ẩm lớn nhất của mẫu.

$$\tau \leq \frac{\Delta x^2}{2(D_0 \exp(kw_{max}) + S\Delta x)} \tag{16}$$

Có thể thấy rằng, đây là điều kiện ràng buộc giữa  $\Delta x$  và  $\tau$ . Thông thường, nên chọn chiều dày lưới  $\Delta x$  (phụ thuộc vào chiều dài của mẫu thử và độ mịn của lưới chia), sau đó chọn bước tối thiểu của bước chia thời gian  $\tau$ .

**3. Kết quả của mô hình sai phân hữu hạn**

Dựa vào những phương trình lý thuyết của phương pháp sai phân hữu hạn, một mô hình truyền ẩm được lập trình bởi VBA đã được thực hiện. Với điều kiện biết các thông số đầu vào là các hệ số truyền ẩm ( $D$ ,  $S$ ,  $k$ ) và các điều kiện về trạng thái ban đầu cũng như trạng thái cân bằng, mô hình này có thể xác định được sự phân bố của độ ẩm theo thời gian trong suốt chiều dài mẫu.

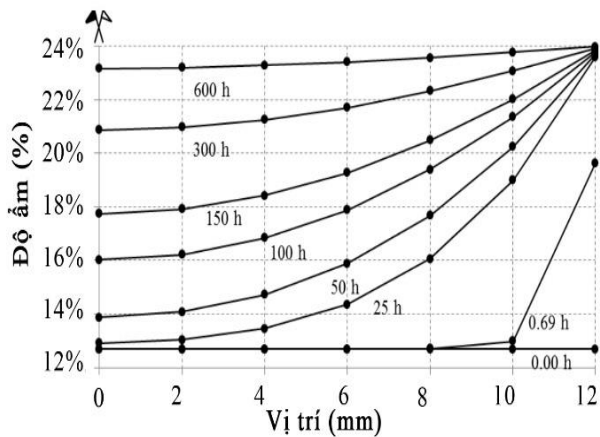
Mẫu thử bằng vật liệu gỗ với các hệ số truyền ẩm như bảng 1, có chiều dài  $e = 24$  mm, với mặt thoáng tiếp xúc với môi trường (hình 1). Mẫu được đặt trong điều kiện biến đổi độ ẩm theo pha

hấp thụ, từ điều kiện độ ẩm đồng nhất 12,7% trong điều kiện độ ẩm tương đối 65% và nhiệt độ 20°C đến trạng thái cân bằng có  $w_{eq} = 24\%$ .

**Bảng 1.** Hệ số truyền ẩm của mẫu gỗ.

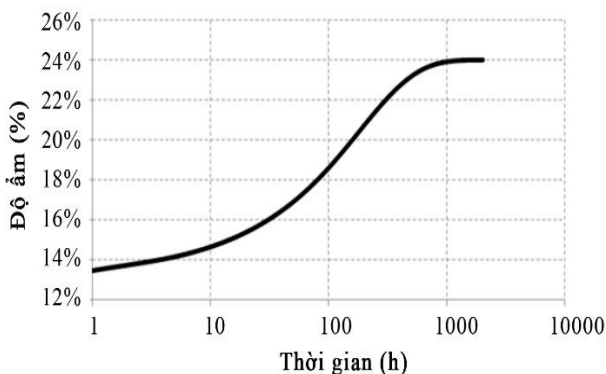
$D_0$ (m <sup>2</sup> /s)	$S$ (m/s)	$k$
2.38E-10	4.1E-7	-5

Mẫu gỗ được đặt trong điều kiện hai mặt thoáng hấp thụ ẩm, do đó xét bài toán truyền ẩm đối xứng. Chọn  $\Delta x = 0.002$  m, nghĩa là nửa chiều dài của mẫu được chia thành 06 đoạn bằng nhau, để



**Hình 5.** Sự phân bố độ ẩm của mẫu theo thời gian.

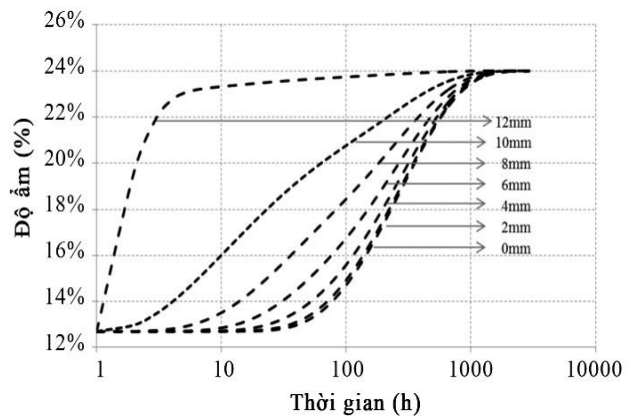
Mô hình sai phân hữu hạn cũng cho phép xác định được sự thay đổi của độ ẩm trung bình của toàn mẫu theo thời gian như hình 7.



**Hình 7.** Sự biến đổi của độ ẩm trung bình theo thời gian.

đảm bảo cho điều kiện bước chia thời gian  $\tau$  thỏa mãn phương trình (16), cần chọn  $\tau \leq 1303s$ .

Để đảm bảo điều kiện hội tụ, chọn  $\tau = 100s$ . Mô hình sai phân hữu hạn cho biết sự phân bố của độ ẩm trong mẫu theo thời gian (hình 5) cũng như sự thay đổi của độ ẩm của mỗi vị trí trong mẫu theo thời gian (hình 6). Hình 5 và 6 cho phép nhận biết được sự lan truyền độ ẩm trong mẫu cũng như tối ưu hóa được thời gian trong quá trình sấy khô.



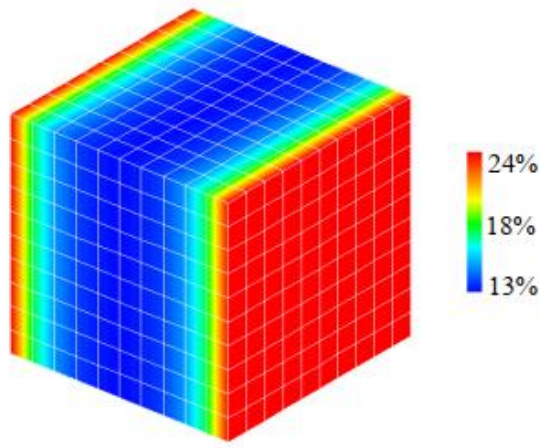
**Hình 6.** Sự biến đổi của độ ẩm của từng vị trí theo thời gian.

Nắm bắt được sự biến đổi độ ẩm trung bình theo thời gian (hình 7) cho phép xác định được thời gian mẫu đạt đến trạng thái bão hòa.

#### 4. Xác thực tính chính xác của mô hình bằng phương pháp so sánh kết quả mô hình với các phương pháp tính khác

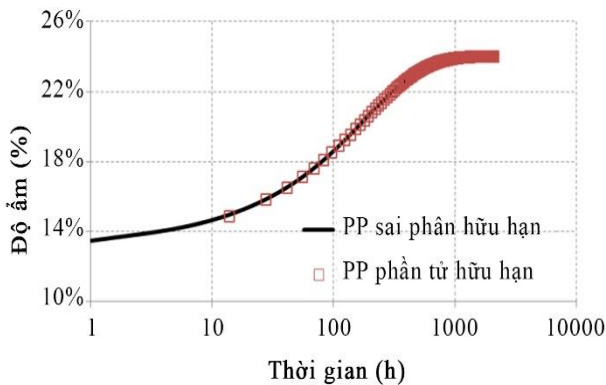
##### So sánh với phương pháp phần tử hữu hạn

Nghiên cứu [2] đã xây dựng mô hình truyền ẩm trong gỗ bằng phương pháp phần tử hữu hạn thông qua phần mềm mô phỏng Cast3m [8]. Xét sự truyền ẩm theo một phương của mẫu thử A theo ví dụ nêu trên với các điều kiện về hệ số truyền ẩm như bảng 1.



**Hình 8.** Sự phân bố độ ẩm tại thời điểm 24 h.

Phương pháp phần tử hữu hạn cho phép mô phỏng quá trình truyền ẩm của mẫu theo thời gian (hình 8). Đường cong sự thay đổi của độ ẩm trung bình theo thời gian tính bởi phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp sai phân hữu hạn gần như trùng nhau, với sai số không đáng kể (hình 9). Điều này khẳng định, mô hình được tính bằng phương pháp sai phân hữu hạn cho kết quả chính xác.



**Hình 9.** So sánh với phương pháp phần tử hữu hạn.

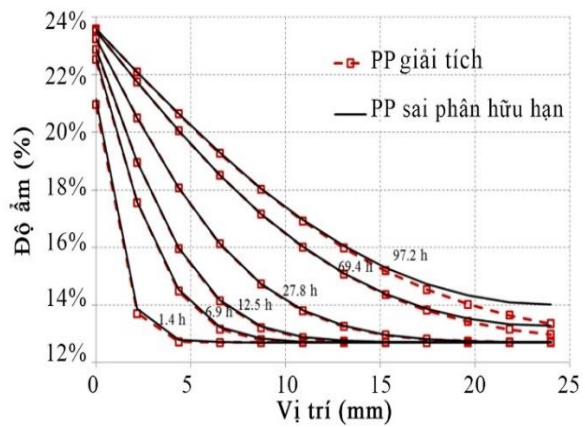
**So sánh với phương pháp giải tích**

Để đảm bảo điều kiện giả định của phương pháp giải tích theo phương trình (6), xét sự truyền ẩm tuyến tính ( $k = 0$ ) theo một phương của một mẫu gỗ B có cùng chiều dài 24 mm, một mặt thoáng tiếp xúc với môi trường, có độ ẩm ban đầu đồng nhất  $w_{ini} = 12,7\%$  và độ ẩm bão hòa  $w_{eq} = 24\%$ . Các hệ số truyền ẩm được trình bày theo bảng 2.

**Bảng 2.** Hệ số truyền ẩm của mẫu B.

$D_0$ (m <sup>2</sup> /s)	$S$ (m/s)	$k$
2.38E-10	4.1E-7	0

Sự phân bố của độ ẩm của mẫu theo thời gian giải theo hai phương pháp được trình bày tại hình 10. Trong những thời điểm đầu tiên (1.4 h, 6.9 h, 12.5 h, 27.8 h), các đường phân bố ẩm theo thời gian theo hai phương pháp gần như trùng nhau. Tuy nhiên, ở những thời điểm khi độ ẩm đã bắt đầu truyền sâu vào phía bên trong mẫu (đường 69.4 h và 97.2 h), các đường phân bố ẩm theo hai phương pháp có các điểm phía ngoài mặt thoáng trùng nhau nhưng tại các điểm phía bên trong mẫu có sai số đáng kể. Sự sai lệch độ ẩm tại các điểm này, do giả thiết môi trường bán vô tận được sử dụng trong phương pháp giải tích.



**Hình 10.** So sánh với phương pháp giải tích.

Phương pháp giải tích chỉ được sử dụng trong điều kiện truyền ẩm tuyến tính và trong môi trường bán vô hạn. Sự trùng nhau của các đường phân bố ẩm tại những thời điểm đầu tiên cũng như sự trùng nhau của độ ẩm tại các điểm bề mặt chứng tỏ phương pháp sai phân hữu hạn cho các kết quả đáng tin cậy.

**5. Kết luận**

Bài báo đã xây dựng phương pháp mô phỏng sự lan truyền độ ẩm trong bài toán truyền ẩm một phương của vật liệu gỗ bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Điều kiện hội tụ của bài toán đã được xét đến. Tác giả xây dựng mô hình bằng phần mềm VBA trong Excel để mô phỏng sự lan truyền độ ẩm với các điều kiện truyền ẩm cho trước (các hệ số truyền ẩm  $D, S, k$ ). Mô hình có thể dự đoán được sự biến đổi của độ ẩm trung bình và sự phân bố độ ẩm theo thời gian. Điều này có ý nghĩa hết sức quan trọng trong các khâu

chế biến sản xuất gỗ cũng như trong quá trình khai thác các công trình có sử dụng kết cấu gỗ.

Mô hình bằng phương pháp sai phân hữu hạn mang đến một giải pháp hữu hiệu về thời gian xử lý cũng như đảm bảo tính chính xác. Mô hình đã được kiểm chứng thông qua sự so sánh với phương pháp giải tích và phương pháp phần tử hữu hạn. Bài báo cũng đã phân tích các điều kiện về hội tụ của bài toán sai phân hữu hạn. Đây được xem là một trong những hạn chế cố hữu của phương pháp này. Điều kiện hội tụ là điều kiện tiên quyết cần phải xem xét trước khi bắt đầu quá trình tính toán.

### Tài liệu tham khảo

- [1] N. M. Boussougou, T. A. Nguyen, N. Angellier, F. Dubois, L. Ulmet, N. Sauvat; “Experimental and numerical aspects in diffusion process characterization in tropical species”. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*. 2014; 18(9):963–982. DOI: 10.1080/19648189.2014.917993.
- [2] T. A. Nguyen; “Approches expérimentales et numériques pour l’étude des transferts hygroscopiques dans le bois”. PhD dissertation; Civil Engineering, University of Limoges, Limoges, France; 2014.
- [3] P. Dietsch, S. Franke, B. Franke, A. Gamper, S. Winter; “Methods to determine wood moisture content and their applicability in monitoring concepts”. *Journal of Civil Structural Health Monitoring*. 2015; 5(2):115–127. DOI:10.1007/s13349-014-0082-7.
- [4] P. Perré, A. Degiovanni; “Simulation par volumes finis des transferts couplés en milieux poreux anisotropes : séchage du bois à basse et à haute température”. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1990; 33(11):2463–2478. DOI: 10.1016/0017-9310(90)90004-E.
- [5] J. Y. Liu and W. T. Simpson; “Mathematical Relationship Between Surface Emission and Diffusion Coefficients”. *Drying Technology*. 1996; 14(3–4):677–699. DOI:10.1080/07373939608917120.
- [6] M. J. Gander, F. Kwok; “Chapter 2: The Finite Difference Method”; in *Numerical analysis of partial differential equations using maple and MATLAB*. Philadelphia, USA: Society for Industrial and Applied Mathematics. 2018; pp. 45–68.
- [7] P. Zhou; “Finite Difference Method”; in *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*. Heidelberg, Berlin: Springer. 1993, pp. 63–94.
- [8] A. Combescure, A. H. Mann, P. Pasquet, “The CASTEM Finite Element System”. Heidelberg, Berlin: Springer. 1982; pp. 115–116.