

Lời giải giải tích cho sóng đơn sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen

Analytical solution for Solitary wave using extended Boussinesq equations of Madsen and Sørensen

Vũ Văn Nghi

Nhóm nghiên cứu Xây dựng và môi trường trong phát triển bền vững (CESD), Trường Đại học Giao thông vận tải Thành phố Hồ Chí Minh

Email liên hệ: nghi.vu@ut.edu.vn

Tóm tắt:

Trong bài báo này, tác giả xác định lời giải giải tích cho sóng đơn sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen. Lời giải giải tích được xác định qua quá trình biến đổi toán học khi áp dụng hàm thế vận tốc cho phương trình Boussinesq ban đầu. Kết quả của lời giải sóng đơn là công thức tính cao độ mặt nước và vận tốc hạt nước theo phương ngang. Lời giải này được sử dụng như điều kiện ban đầu để mô phỏng sóng đơn hoặc sóng thần trong các mô hình số. Sóng đơn là một loại sóng có đặc trưng vật lý rất quan trọng trong tự nhiên và có đặc trưng riêng vì nó có thể duy trì được hình dạng và chiều cao sóng khi di chuyển trên quãng đường dài. Lời giải giải tích trong nghiên cứu này được kiểm chứng với các lời giải giải tích khác và cho thấy độ chính xác của lời giải. Kết quả từ nghiên cứu này sẽ giúp hiểu rõ hơn về động lực học sóng đơn và cung cấp thêm một công cụ hữu ích trong việc mô phỏng sóng khi sử dụng phương trình Boussinesq của Madsen và Sørensen.

Từ khóa: Lời giải giải tích; Sóng đơn; Sóng thần; Phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen.

Abstract:

In this paper, the author introduces an analytical solution for the solitary wave using the extended Boussinesq equations developed by Madsen and Sørensen in 1992. The solution is derived using a mathematical method, where the potential velocity is applied to the Boussinesq equations, resulting in analytical solutions for water surface elevation and horizontal particle velocity. The analytical solution is applied as an initial condition for the simulation of tsunami or solitary waves. The solitary wave is a crucial physical feature of many natural systems, such as ocean waves, and is characterized as a wave that retains its shape and height as it travels over long distances. To validate the proposed solution, the author compares the numerical results of the derived analytical solution with those of other solutions and finds a high degree of accuracy. The findings of this study contribute to a better understanding of the dynamics of solitary waves and provide a useful tool for the numerical simulation of water waves using the extended Boussinesq equations of Madsen and Sørensen.

Keywords: Analytical solution; Solitary wave; Tsunami; Extended Boussinesq equations of Madsen and Sørensen.

1. Giới thiệu

Sóng đơn là một loại sóng đặc biệt bởi hình dạng và đặc trưng vật lý của nó. Như quan sát ảnh chụp thực tế trên hình 1, đây là loại sóng rất dài (thường là chiều dài không xác định) và không có chu kỳ. Đặc trưng này khác biệt hoàn toàn với các dạng sóng

nước thông thường khác. Trong nghiên cứu [1], các tác giả cho thấy sóng đơn xuất hiện khá thường xuyên ở vùng biển nước nông và khu vực có đáy biển phẳng. Các điều kiện tự nhiên này khá giống với vùng biển khu vực Đồng bằng sông Cửu Long [2]. Tuy nhiên chưa có nhiều nghiên cứu hoặc báo cáo liên quan tới sự hình thành và phát triển sóng

đơn ở vùng biển này. Một thí nghiệm từ mô hình vật lý cho thấy sóng đơn có thể lan truyền đi khoảng cách rất xa với tốc độ truyền sóng và hình dạng sóng gần như không thay đổi trên đáy phẳng [3]. Thí nghiệm này còn cho thấy vận tốc truyền sóng phụ thuộc vào chiều cao sóng.



Hình 1. Hình chụp thực tế sóng đơn trên biển. (b) chụp tại Mexico ngày 6 tháng 01 năm 2010; (c) chụp tại California ngày 3 tháng 5 năm 2012 [1].

Do hình dạng và đặc trưng của sóng đơn khá giống với sóng thần nên nó được sử dụng nhiều trong việc mô phỏng sự phát triển của sóng thần cũng như tương tác giữa sóng thần với các công trình ven biển [4]–[6]. Cho [4] đã dùng sóng đơn để xác định sự biến đổi chiều cao sóng thần khi sóng tràn lên một hòn đảo gần bờ. Silva [5] đã phát triển mô hình số và sử dụng thí nghiệm bằng mô hình vật lý để mô phỏng sóng đơn tương tác với các công trình bảo vệ bờ biển, trong khi đó Domínguez [6] đã sử dụng sóng đơn để xác định tải trọng sóng tác dụng lên công trình bảo vệ cảng và xác định sóng leo trên bãi biển. Sóng đơn cũng thường được sử dụng để đánh giá hiệu quả giảm sóng của các công trình bảo vệ bờ dạng kết cấu rỗng [7]–[9] hoặc để đánh giá độ ổn định của mô hình số [10]–[12].

Do sóng đơn là sóng phi tuyến, không có chu kỳ giống như các loại sóng nước khác nên để mô phỏng cần tìm được điều kiện ban đầu của sóng đơn phù hợp với từng loại mô hình mô phỏng sóng. Trong mô phỏng sóng đơn lan truyền tại vùng nước nông sử dụng phương trình phi tuyến nước nông, Wang [13] đã dùng lời giải giải tích cho sóng đơn ở vùng nước nông. Khi mô phỏng sóng bằng mô hình Boussinesq của Nwogu, Wei và Kirby [11] cũng đã

tìm lời giải giải tích cho sóng đơn với mô hình này. Trong nghiên cứu này, tác giả đề xuất lời giải giải tích cho sóng đơn đối với các mô hình số sử dụng phương trình Boussinesq của Madsen và Sørensen.

2. Lời giải giải tích cho sóng đơn

Để xác định được lời giải giải tích cho sóng đơn [14], trước hết tác giả biến đổi phương trình Boussinesq cơ bản (phương trình mô tả sóng truyền trong vùng nước nông, có biến là cao độ mặt nước và thành phần vận tốc) thành phương trình vi phân thường c biến là hàm thế vận tốc. Đây là dạng phương trình vi phân bậc 4. Từ phương trình này có thể xác định được các biến cần tìm là cao độ mặt nước (ζ) và vận tốc hạt nước theo phương ngang (u). Các giá trị này được sử dụng như điều kiện ban đầu để mô phỏng sóng đơn. Trong bài báo này, tác giả áp dụng theo phương pháp được mô tả ở trên để tìm lời giải giải tích cho sóng đơn sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen [15]. Phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen được viết lại dưới dạng không thứ nguyên trong không gian một chiều như sau:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\zeta u) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \varepsilon u \frac{\partial u}{\partial x} - \mu^2 \left(\gamma + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \\ - \mu^2 \gamma \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó, ζ là cao độ mặt nước, u vận tốc hạt nước theo phương ngang, ε ($= a/h$) là thông số thể hiện tính phi tuyến của sóng, μ ($= h/L$) là thông số thể hiện tính phân tán của sóng, a là biên độ sóng, h là độ sâu nước, L là chiều dài sóng, γ ($= 1/15$) là hệ số hiệu chỉnh mô hình. Các biến trong phương trình (1) và (2) đều là biến không thứ nguyên. Trong các bước tính toán tiếp theo, hàm thế vận tốc Φ ($u = \partial \Phi / \partial x = \Phi'$) được sử dụng thay cho thành phần vận tốc hạt nước theo phương ngang u . Khi đó phương trình (1) và (2) trở thành:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \zeta + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 - \mu^2 \left(\gamma + \frac{1}{3} \right) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial t} - \mu^2 \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

Thay phương trình (4) vào phương trình (3) ta được

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - 2\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{1}{3} \mu^2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial t^2} = O(\varepsilon^2, \varepsilon \mu^2, \mu^4) \quad (5)$$

Nếu ta dùng pha được định nghĩa $\xi = x - Ct$ (với C là vận tốc pha sóng, sẽ được xác định ở phần sau) thì khi đó phương trình (5) có dạng

$$(1 - C^2) \Phi'' + 3\varepsilon C \Phi' \Phi'' + \frac{1}{3} \mu^2 C^2 \Phi''' = 0 \quad (6)$$

Các dấu nháy (') và (") trong phương trình (6) cũng như trong các phương trình sau tương ứng là các đạo hàm bậc 1 và bậc 2. Tích phân phương trình (6) cho ta phương trình (7) như sau:

$$(1 - C^2) \Phi' + \frac{3}{2} \varepsilon C (\Phi')^2 + \frac{1}{3} \mu^2 C^2 \Phi'' = J_1 \quad (7)$$

Với J_1 là hằng số tích phân. Phương trình (7) được nhân với $(2\Phi'')$ và sau đó tích phân thêm một lần, ta được:

$$(1 - C^2) (\Phi')^2 + \varepsilon C (\Phi')^3 + \frac{1}{3} \mu^2 C^2 (\Phi'')^2 = 2J_1 \Phi' + J_2 \quad (8)$$

Với J_2 là hằng số tích phân. Các hằng số tích phân J_1 và J_2 bằng 0 do các đạo hàm $\Phi' = \Phi'' = \Phi''' = 0$ khi $|\xi| \rightarrow \infty$. Lời giải giải tích của thành phần đạo hàm bậc 1 của hàm thế vận tốc có dạng sau:

$$\Phi' = A \operatorname{sech}^2(K\xi) \quad (9)$$

Thay phương trình (9) vào phương trình (8) ta được các giá trị A và K như sau:

$$A = \frac{C^2 - 1}{\varepsilon C} \quad (10)$$

$$K = \left(\frac{3C^2 - 1}{4\mu^2 C^2} \right)^{1/2} \quad (11)$$

Thay phương trình (9) vào phương trình (4) đồng thời sử dụng A và K trong hai phương trình (10) và (11) ta được phương trình đường mặt nước:

$$\zeta = A_1 \operatorname{sech}^2(K\xi) + A_2 \operatorname{sech}^4(K\xi) \quad (12)$$

Trong đó A_1 và A_2 là các hệ số được cho bởi:

$$A_1 = \frac{(C^2 - 1)[1 - 3\gamma(C^2 - 1)]}{\varepsilon [C^2 - 3\gamma(C^2 - 1)]} \quad (13)$$

$$A_2 = \frac{(C^2 - 1)^2 [2C^2 + 3\gamma(C^2 - 1)]}{2\varepsilon [C^2 - 12\gamma(C^2 - 1)][C^2 - 3\gamma(C^2 - 1)]} \quad (14)$$

Thành phần vận tốc pha C được xác định khi sử dụng điều kiện biên ($\xi = 0, \zeta = 1$) trong phương trình (12):

$$(2 - 3\gamma + 72\gamma^2)(C^2)^3 - [2(1 + \varepsilon) + 3(7 - 10\varepsilon)\gamma + 72(3 + \varepsilon)\gamma^2](C^2)^2 + [3(17 - 10\varepsilon)\gamma + 72(3 + \varepsilon)\gamma^2]C^2 - [27\gamma + 72(1 + \varepsilon)\gamma^2] = 0 \quad (15)$$

Trong vùng nước nông, $\gamma = 0$, từ phương trình (15)

có thể tìm được vận tốc lan truyền sóng $C = \sqrt{1 + \varepsilon}$

. Đây chính là công thức tính vận tốc sóng nước nông trong mô hình của Peregrine [16]. Như vậy, lời giải giải tích cho sóng đơn được thể hiện qua cao độ mặt nước và thành phần vận tốc hạt nước theo phương ngang:

$$\zeta = A_1 \operatorname{sech}^2[K(x - Ct)] + A_2 \operatorname{sech}^4[K(x - Ct)] \quad (16)$$

$$u = A \operatorname{sech}^2[K(x - Ct)] \quad (17)$$

Với các hệ số không thứ nguyên được cho trong các công thức (10), (11), (13) và (14). Dưới dạng thứ nguyên, các hệ số này lần lượt được cho bởi các công thức sau:

$$A = \frac{C^2 - gh}{C} \quad (18)$$

$$K = \frac{1}{h} \left(\frac{3C^2 - gh}{4C^2} \right)^{1/2} \quad (19)$$

$$A_1 = \frac{(C^2 - gh)[gh - 3\gamma(C^2 - gh)]}{gh[C^2 - 3\gamma(C^2 - gh)]} h \quad (20)$$

$$A_2 = \frac{(C^2 - gh)^2 [2C^2 + 3\gamma(C^2 - gh)] h}{2gh[C^2 - 12\gamma(C^2 - gh)][C^2 - 3\gamma(C^2 - gh)]} \quad (21)$$

3. Kiểm chứng lời giải giải tích

Kết quả từ lời giải giải tích trong nghiên cứu này được so sánh với lời giải cho sóng đơn của Wang [13] cũng như Wei và Kirby [11]. Cao độ mặt nước và hàm thể vận tốc trong nghiên cứu của Wang được thể hiện qua phương trình:

$$\zeta_w = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \left[\operatorname{sech}^2 k(x-ct-x_0) + \varepsilon \operatorname{sech}^4 k(x-ct-x_0) \right] \quad (22)$$

$$\Phi_w = \left(\frac{4}{3} \varepsilon \right)^{1/2} \operatorname{tanh} k(x-ct-x_0) \quad (23)$$

Với $k = \sqrt{3\varepsilon/4/(1+\varepsilon)}$ và $c = \sqrt{1+\varepsilon}$.

Cần lưu ý là lời giải giải tích trên đây được dựa trên phương trình Boussinesq nước nông. Trong khi đó, Wei và Kirby [11] phát triển lời giải giải tích cho sóng đơn dựa trên phương trình Boussinesq mở rộng của Nwogu [17], một dạng phương trình có thể mô phỏng sóng ở vùng nước chuyển tiếp. Cao độ mặt nước và thành phần vận tốc theo phương ngang trong lời giải của Wei và Kirby:

$$\zeta_{wk} = E_1 \operatorname{sech}^2 F(x-Ct) + E_2 \operatorname{sech}^4 F(x-Ct) \quad (24)$$

$$u_{wk} = E \operatorname{sech}^2 F(x-Ct) \quad (25)$$

Các hệ số E , E_1 , E_2 và F được định nghĩa trong các công thức sau:

$$E = \frac{C^2 - 1}{\varepsilon C}$$

$$E_1 = \frac{C^2 - 1}{3\varepsilon \left[(\alpha + 1/3) - \alpha C^2 \right]}$$

$$E_2 = - \frac{(C^2 - 1)^2 (\alpha + 1/3) + 2\alpha C^2}{2\varepsilon C^2 (\alpha + 1/3) - \alpha C^2}$$

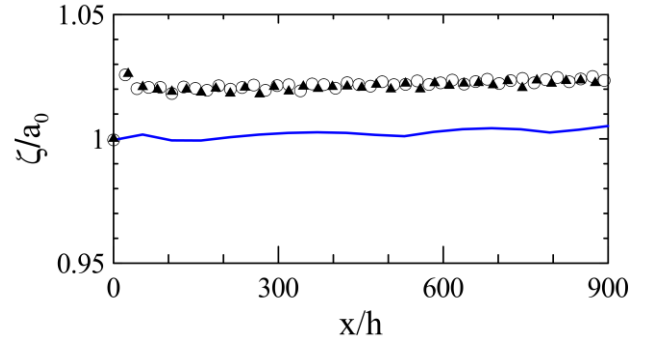
$$F = \left\{ \frac{1}{4} \frac{C^2 - 1}{\mu^2 \left[(\alpha + 1/3) - \alpha C^2 \right]} \right\}^{1/2}$$

Với α là hệ số hiệu chỉnh mô hình [17].

3.1. Mật mát năng lượng của sóng đơn theo quãng đường di chuyển

Một trong những đặc trưng cơ bản của sóng đơn là nó có thể di chuyển trên quãng đường dài, năng lượng bị tổn thất rất ít. Để kiểm tra đặc trưng cơ bản này của sóng đơn, sóng được mô phỏng truyền đi

một quãng đường bằng 900 lần độ sâu nước (độ sâu nước $h = 0.3$ m), độ phi tuyến của sóng đơn ở mức trung bình ($\varepsilon = 0.3$). Hình 2 cho kết quả so sánh ba lời giải giải tích được giới thiệu trong nghiên cứu này. Có thể nhận thấy các lời giải đều cho kết quả khá tốt với từ hai lời giải đầu với kết quả khá tương đồng với sai số dưới 2%, trong khi đó, lời giải trong nghiên cứu này cho kết quả dưới 0.5%. Chiều cao sóng đơn tăng nhẹ do tính phi tuyến của sóng nhưng sau đó duy trì ổn định suốt quãng đường di chuyển, điều đó chứng tỏ năng lượng sóng bị tổn thất rất ít trong quá trình lan truyền.



Hình 2. Tổn thất năng lượng sóng đơn trên quãng đường di chuyển.

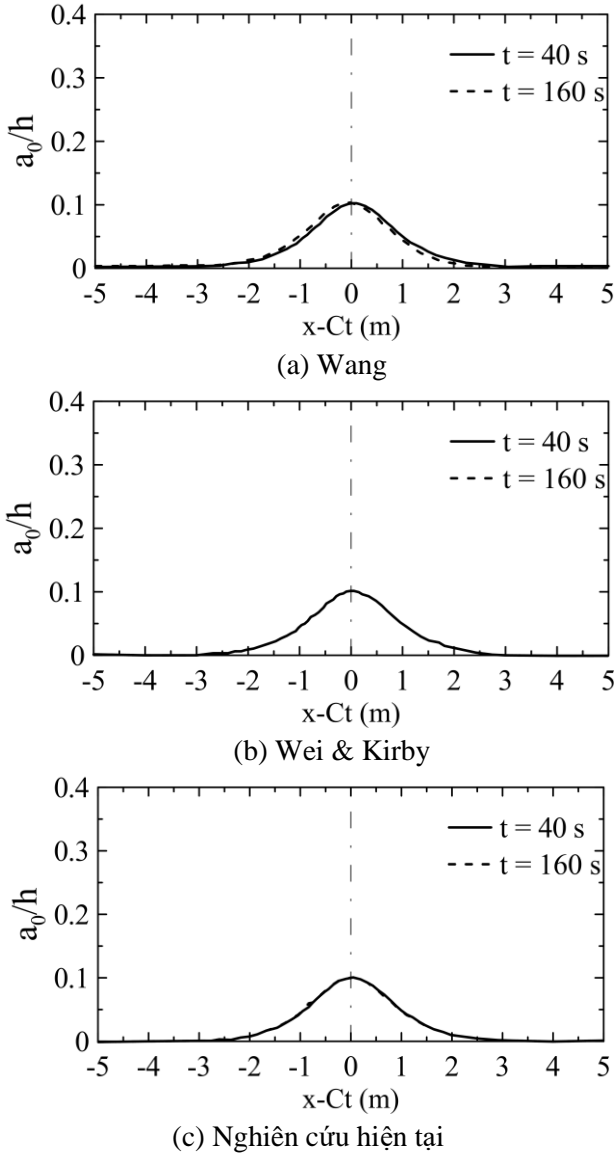
Khoanh tròn: lời giải giải tích của [11]; tam giác: lời giải giải tích của [13]; đường nét liền: lời giải giải tích trong nghiên cứu này.

3.2. Ổn định của sóng đơn theo thời gian di chuyển

Nếu năng lượng không bị ảnh hưởng theo khoảng cách di chuyển mà hình dạng và tốc độ của sóng đơn thay đổi thì nó chưa được xem là sóng ổn định khi truyền trên đáy phẳng. Về mặt lý thuyết nếu sóng truyền trên đáy phẳng, không có biến đổi địa hình, năng lượng sóng, hình dạng và tốc độ truyền sóng không đổi.

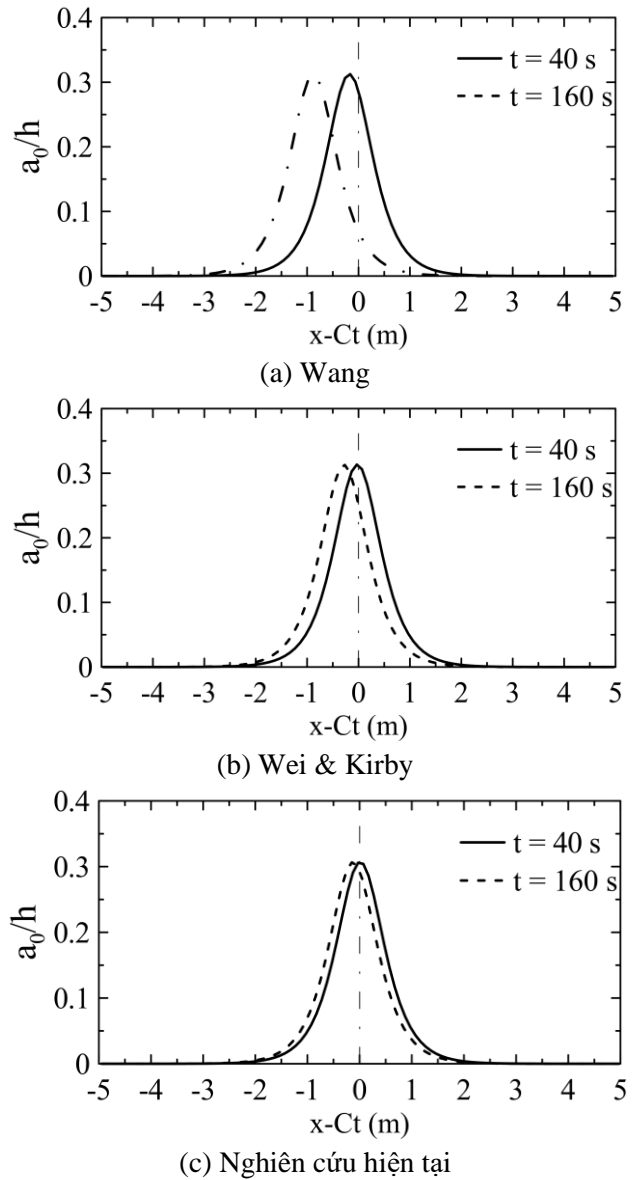
Trong phần này, tác giả so sánh hình dạng của sóng đơn ở 2 thời điểm khác nhau ($t = 40$ s và $t = 160$ s) cho cả ba lời giải với hai trường hợp độ phi tuyến của sóng khác nhau ($\varepsilon = 0.1$ và $\varepsilon = 0.3$). Sóng đơn tại từng thời điểm được dịch chuyển một lượng Ct , với C là vận tốc pha sóng được xác định từ công thức (15) và t là thời gian di chuyển. Nếu không có sự biến đổi về năng lượng, hình dạng và tốc độ truyền sóng thì hình dạng sóng tại các thời điểm khác nhau sẽ giống nhau và trùng nhau.

Hình 3 cho kết quả mô phỏng sóng đơn khá tương đồng giữa các lời giải ở hai thời điểm khác nhau. Trường hợp này sóng đơn có độ phi tuyến yếu ($\varepsilon = 0.1$).



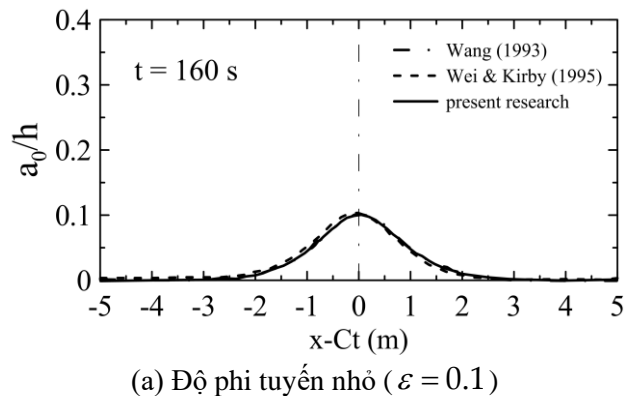
Hình 3. Sự lệch pha sóng đơn khi di chuyển thời gian dài (độ phi tuyến nhỏ, $\varepsilon = 0.1$).

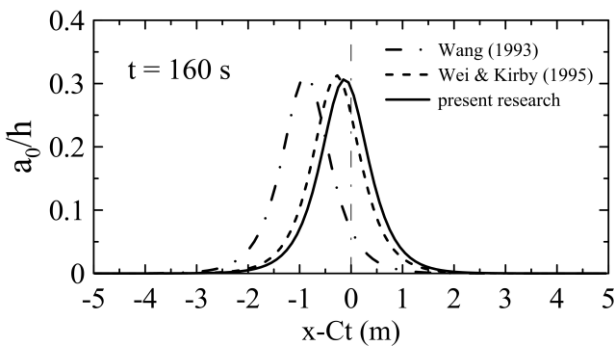
Với độ phi tuyến của sóng tăng ($\varepsilon = 0.3$), hình 4 cho ta thấy các lời giải giải tích đều có sự sai khác nhất định khi hình dạng sóng đều bị lệch so với vị trí ban đầu (tốc độ truyền sóng đều chậm) dù lời giải trong nghiên cứu này cho kết quả phù hợp nhất. Điều này có thể được giải thích khi hai lời giải ban đầu không áp dụng cho mô hình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen. Do đó, việc sử dụng đúng điều kiện biên ban đầu phù hợp với mô hình số là rất quan trọng.



Hình 4. Sự lệch pha sóng đơn khi di chuyển thời gian dài (độ phi tuyến lớn, $\varepsilon = 0.3$).

Hình 5 cho thấy cái nhìn trực quan hơn giữa kết quả của các lời giải giải tích tại thời điểm $t = 160$ s. Rõ ràng khi độ phi tuyến sóng yếu, kết quả khá chính xác giữa các lời giải nhưng khi độ phi tuyến sóng tăng lên sẽ có sự khác biệt giữa các lời giải.



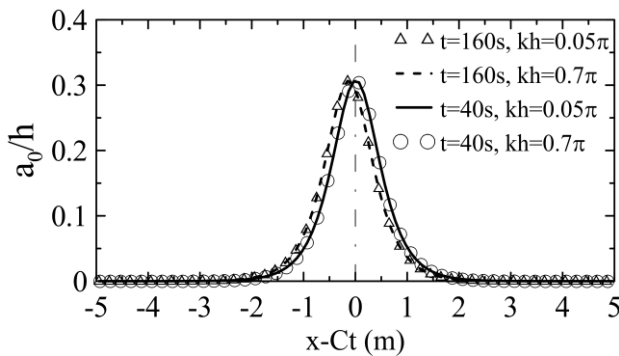


(b) Độ phi tuyến lớn ($\epsilon = 0.3$)

Hình 5. Sự lệch pha sóng đơn với các lời giải giải tích khác nhau.

3.3. Ảnh hưởng của độ sâu nước tới lan truyền sóng đơn

Từ các kết quả trên có thể thấy nếu sử dụng lời giải giải tích cho sóng đơn trong nghiên cứu này làm điều kiện ban đầu khi mô phỏng sóng áp dụng mô hình [15] sẽ cho kết quả phù hợp.



Hình 6. So sánh pha và hình dạng sóng đơn ở vùng nước nông và vùng nước sâu.

Để đánh giá ảnh hưởng của độ sâu nước đến lan truyền sóng đơn, tác giả sử dụng lời giải giải tích trong nghiên cứu này để mô phỏng sóng đơn ở vùng nước nông ($kh = 0.05\pi$) và vùng nước sâu ($kh = 0.7\pi$) cho trường hợp độ phi tuyến lớn ($\epsilon = 0.3$). Kết quả so sánh trên hình 6 cho thấy chỉ có sự khác biệt về pha sóng ở thời gian truyền sóng như đã phân tích ở trên, không có sự khác biệt ở hai vùng nước. Như vậy, có thể thấy độ sâu nước không ảnh hưởng đến kết quả mô phỏng sóng đơn.

4. Kết luận

Bài báo đã giới thiệu lời giải giải tích cho sóng đơn sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen [15]. Lời giải trong nghiên cứu này đã được kiểm chứng với các lời giải giải tích

khác và cho thấy sự phù hợp. Năng lượng sóng được bảo toàn, vận tốc truyền sóng ổn định và lời giải không có sự khác biệt giữa các vùng nước khác nhau. Lời giải này cũng đặc biệt chính xác hơn nếu áp dụng cho mô hình số sử dụng phương trình Boussinesq mở rộng của Madsen và Sørensen. Lời giải có thể sử dụng làm điều kiện ban đầu khi mô phỏng sóng đơn, sóng thần lan truyền và tương tác với các công trình ven biển.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Quỹ Phát triển khoa học và công nghệ Quốc gia (NAFOSTED) thông qua đề tài mã số “107.03-2019.338”.

Tài liệu tham khảo

- [1] M. J. Ablowitz, D. E. Baldwin; “Nonlinear shallow ocean-wave soliton interactions on flat beaches”. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*. 2012; 86:036305. DOI:10.1103/PHYSREVE.86.036305/FIGURES/6/MEDIUM.
- [2] K. Schmitt, T. Albers, T. T. Pham, S. C. Dinh; “Site-specific and integrated adaptation to climate change in the coastal mangrove zone of Soc Trang Province, Viet Nam”. *Journal of Coastal Conservation*. 2013; 17:545–558. DOI:10.1007/s11852-013-0253-4.
- [3] J. Russell; “Advancement of Science”; in: *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, John Murray, London. 1844; pp. 311–390.
- [4] Y. S. Cho, K. Y. Park, T. H. Lin; “Run-up heights of nearshore tsunamis based on quadtree grid system”. *Ocean Engineering*. 2004; 31(8-9):1093–1109. DOI:10.1016/J.OCEANENG.2003.10.011.
- [5] R. Silva, I. J. Losada, M.A. Losada; “Reflection and transmission of tsunami waves by coastal structures”. *Applied Ocean Research*. 2000; 22(4):215–223. DOI:10.1016/S0141-1187(00)00012-2.
- [6] J. M. Domínguez, C. Altomare, J. Gonzalez-Cao, P. Lomonaco; “Towards a more complete tool for coastal engineering: solitary wave generation, propagation and breaking in an SPH-

- based model”. *Coastal Engineering Journal*. 2019; 61(1): 15–40. DOI:10.1080/21664250.2018.1560682.
- [7] V. N. Vu, C. Lee; “Solitary wave interaction with porous structures”. *Procedia Engineering*. 2015; 116:834–841. DOI:10.1016/j.proeng.2015.08.371.
- [8] P. J. Lynett, P. L. -F. Liu, I. J. Losada, C. Vidal; “Solitary Wave Interaction with Porous Breakwaters”. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 2000; 126(6):314–322. DOI:10.1061/(ASCE)0733-950X(2000)126:6(314).
- [9] P. L. -F. Liu, P. Lin, K. -A. Chang, T. Sakakiyama; “Numerical Modeling of Wave Interaction with Porous Structures”. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 1999; 125 (6):322–330. DOI:10.1061/(ASCE)0733-950X(1999)125:6(322).
- [10] V. N. Vu, M. Kazolea, V. K. Pham, C. Lee; “A hybrid FV/FD scheme for a novel conservative form of extended Boussinesq equations for waves in porous media”. *Ocean Engineering*. 2023; 269:113491. DOI:10.1016/J.OCEANENG.2022.113491.
- [11] G. Wei, J. T. Kirby; “Time-Dependent Numerical Code for Extended Boussinesq Equations”. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 1995; 121(5):251-261. DOI:10.1061/(asce)0733-950x(1995)121:5(251).
- [12] M. Kazolea, A.I. Delis; “A well-balanced shock-capturing hybrid finite volume–finite difference numerical scheme for extended 1D Boussinesq models”; *Applied Numerical Mathematics*. 2013; 67:167–186. DOI:10.1016/J.APNUM.2011.07.003.
- [13] K. -H. Wang; “Diffraction of Solitary Waves by Breakwaters”. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 1993; 119(1):49–69. DOI:10.1061/(ASCE)0733-950X(1993)119:1(49).
- [14] H. R. Schember; “A new model for three-dimensional nonlinear dispersive long waves”; PhD Dissertation; California Institute of Technology; Pasadena, California Pasadena; 1982.
- [15] P. A. Madsen, O. R. Sørensen; “A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry”. *Coastal Engineering*. 1992; 18(3-4):183-204. DOI:10.1016/0378-3839(92)90019-Q.
- [16] D. H. Peregrine; “Long waves on a beach”. *Journal of Fluid Mechanics*. 1967; 27(4):815–827. DOI:10.1017/S0022112067002605.
- [17] O. Nwogu; “Alternative Form of Boussinesq Equations for Nearshore Wave Propagation”. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*. 1993; 119 (6):618–638. DOI:10.1061/(ASCE)0733-950X(1993)119:6(618).