

Mô phỏng tương tác dòng chảy sau vỡ đập với đáy hạ lưu phức tạp dùng mô hình Flow 3D

Simulation of interactions between dam-break flows and complex downstream beds using Flow 3D model

Vũ Văn Nghi¹, Phạm Văn Khôi^{2*}

¹Nhóm nghiên cứu Xây dựng và môi trường trong phát triển bền vững (CESD), Trường Đại học Giao thông vận tải Thành phố Hồ Chí Minh

²Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

* Tác giả liên hệ: khoipv.ctt@vimaru.edu.vn

Tóm tắt:

Tính toán mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập được thực hiện phổ biến trên thế giới, nhất là trong hoàn cảnh biến đổi khí hậu đang diễn ra ngày càng phức tạp và tác động khó lường tới tính mạng con người cũng như cơ sở hạ tầng. Bài báo trình bày tương tác dòng chảy sau vỡ đập với các trường hợp đáy nhám phức tạp sử dụng mô hình dòng chảy ba chiều Flow 3D. Mô hình giải tích và mô hình thí nghiệm vật lý được tiến hành cho trường hợp đáy phẳng không nhám để kiểm chuẩn kết quả từ mô hình Flow 3D. Hai trường hợp đáy nhám phức tạp, tương ứng là đáy nhám khối tam giác và khối hộp chữ nhật, được lựa chọn để thể hiện tương tác với dòng chảy sau vỡ đập. Với trường hợp đáy nhám có khối tam giác, mô hình số đã mô phỏng chính xác đặc trưng dòng chảy qua đáy nhám và chiều cao dòng chảy tràn qua đáy có khối tam giác. Với trường hợp đáy nhám có khối hộp chữ nhật, vận tốc dòng chảy trước và sau tương tác được mô phỏng khá phù hợp với kết quả thí nghiệm mô hình vật lý.

Từ khóa: Bài toán mô phỏng vỡ đập; Mô hình giải tích; Mô hình vật lý; Mô hình dòng chảy ba chiều; Đáy phức tạp.

Abstract:

Dam-break flow simulations are conducted all over the world, especially in the climate change phenomena taking place, complicated and impacting humans' lives as well as the infrastructures. This paper introduces the interactions between dam-break flows and complex beds using the Flow-3D model. The analytical solution and the physical experiment are implemented to the dam-break flow over the simple and nonrough bed case to calibrate the numerical simulation. Two complex rough beds, which are the hump bed and the solid column bed, are selected to simulate the interactions between dam-break flows and these structures. With the hump bed, the Flow 3D model accurately simulates the flow characteristics over the rough bed and the flow height overtopping the hump. With the solid column bed, the flow velocities before and after a collision are simulated correctly when compared to the experimental data.

Keywords: Dam-break simulation; Analytical solution; Physical model; Flow-3D model; Complex bed.

1. Giới thiệu

Bài toán mô phỏng vỡ đập (dam-break simulation) được ứng dụng phổ biến trong thực tế cho vấn đề dự báo thiên tai, ứng phó với biến đổi khí hậu ngày càng gia tăng ở khắp các quốc gia trên thế giới [1]–[4]. Đặc biệt, dòng chảy sau vỡ đập hình thành dòng

chảy lũ ở đáy hạ lưu tác động lên cơ sở hạ tầng và đô thị, đe dọa tính mạng, nhà cửa và tài sản của con người. Để mô phỏng vỡ đập, ngoài mô hình giải tích [5], [6] và mô hình vật lý [7], [8], mô hình số [9], [10] được xem là có ưu thế hơn vì dễ sử dụng và ít tốn kém. Trong mô hình số, tùy theo kích thước của miền tính toán để chia và lựa chọn các

mô hình, như một chiều [1], [11], hai chiều [12], ba chiều [13], [14]. Mô hình một chiều và hai chiều thường không xét tới gia tốc theo phương đứng nên kết quả không chính xác như mô hình ba chiều đầy đủ. Mô hình số dòng chảy ba chiều (Flow 3D) được lựa chọn để mô phỏng tương tác dòng chảy sau vỡ đập với các trường hợp đáy nhám phức tạp trong bài toán ngập lụt đô thị thực tế. Mô hình số Flow 3D gần đây được sử dụng để mô phỏng tương tác sóng [15], dòng chảy [13] với công trình khá phổ biến ở Việt Nam. Trong nghiên cứu này, mô hình số Flow 3D được giới thiệu ở phần 2, kết quả kiểm chuẩn mô hình số được trình bày ở phần 3. Phần 4 thể hiện kết quả mô phỏng tương tác dòng chảy và đáy nhám có dạng khối tam giác và khối hộp chữ nhật, kết luận đưa ra ở phần 5.

2. Mô hình Flow 3D

Hệ phương trình chủ đạo được áp dụng là hệ phương trình ba chiều Navier-Stokes, phương trình liên tục và phương trình động lượng được trình bày như sau:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \nabla \cdot (\mathbf{A}\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{p} + \mathbf{G} + \mathbf{f}_v \quad (2)$$

Trong đó, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ là toán tử vi phân, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ tương ứng là vận tốc dòng chảy theo các phương x, y, z ; ρ là khối lượng riêng nước; p là áp suất; \mathbf{G} là gia tốc bản thân; \mathbf{f}_v là gia tốc nhớt. Với mô hình dòng chảy ba chiều, đường lưới sẽ nhận diện kích thước hình học kết cấu rỗng bằng phương pháp tỷ lệ. Do đó, A là tỷ lệ diện tích nước chiếm chỗ và V_F là tỷ lệ thể tích nước chiếm chỗ trong hệ tọa độ Đề các.

Kỹ thuật chuyển đổi thể tích chất lỏng VOF (volume of fluid) được sử dụng để phân biệt các pha lỏng và khí thể hiện qua phương trình:

$$\frac{\partial V_w}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \nabla \cdot (V_w \mathbf{A}\mathbf{u}) = 0 \quad (3)$$

Trong đó, V_w là tỷ lệ thể tích chất lỏng (nước) trong lưới tính toán, $V_w = 0, 0 < V_w < 1$ và $V_w = 1$ tương ứng thể hiện các pha khí, giao diện và

nước. Véc tơ gia tốc nhớt \mathbf{f}_v thể hiện lực cản do tính nhớt của chất lỏng trong hệ tọa độ Đề các ba chiều [16] như sau:

$$\rho V_F f_{vx} = s_x - \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{xz}) \right] \quad (4)$$

$$\rho V_F f_{vy} = s_y - \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{yy}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{yz}) \right] \quad (5)$$

$$\rho V_F f_{vz} = s_z - \left[\frac{\partial}{\partial x} (A_x \tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_y \tau_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z} (A_z \tau_{zz}) \right] \quad (6)$$

Trong đó $s_{i(i=x,y,z)}$ là ứng suất biên theo các trục tọa độ, các thành phần τ là ứng suất cắt. Mô hình chảy rối sử dụng hệ số nhớt động lực μ và hai phương trình tổn thất năng lượng $k - \varepsilon$, được thể hiện như sau [17]:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left(u A_x \frac{\partial k}{\partial x} + v A_y \frac{\partial k}{\partial y} + w A_z \frac{\partial k}{\partial z} \right) = P_T + G_T + D_k - \varepsilon \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{1}{V_F} \left(u A_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v A_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w A_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) = \frac{C_{1\varepsilon} \varepsilon}{k} (P_T + C_{3\varepsilon} G_T) + D_\varepsilon - C_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (8)$$

Trong đó, P_T là thành phần năng lượng động học rối; G_T là thành phần lực nổi; D_k và D_ε tương ứng là các thành phần khuếch tán; $C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$ là các hệ số được sử dụng.

3. Kiểm chuẩn mô hình

Để kiểm chuẩn mô hình số Flow 3D, thí nghiệm mô phỏng dòng chảy vỡ đập trên đáy phẳng nhẵn được thiết lập trên cả mô hình vật lý và mô hình giải tích. Thí nghiệm mô hình vật lý được thực hiện tháng 12 năm 2022 tại phòng thí nghiệm Thủy lực – Thủy văn, khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam như hình 1. Mô hình giải tích cho dòng chảy vỡ đập trên đáy không ma sát căn cứ theo tài liệu [5].

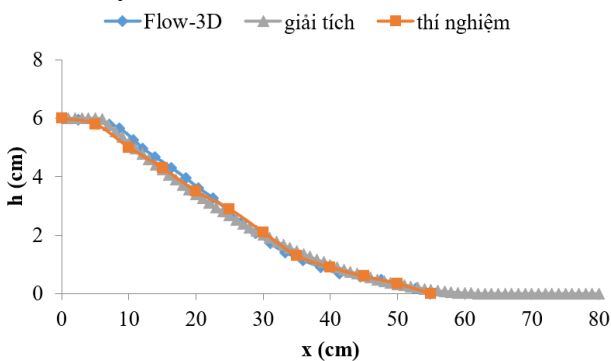
Mô hình vật lý dạng bể kính cường lực có chiều dày 1 cm, kích thước phần chứa nước $B \times L \times H = 45 \times 81 \times 55$ cm. Bể kính có cấu tạo từ 04 tấm kính chính, tương ứng với điều kiện biên mặt đáy, mặt trước, mặt sau và mặt bên trái là biên tường. Mặt trên và mặt bên phải để hở tương

ứng với điều kiện biên phải là dòng chảy tự do. Do đặc điểm hoạt động thường xuyên, cửa đập được làm bằng vật liệu mica dày 1 cm, cách tường đứng bên một khoảng $l = 25\text{cm}$. Để chống thấm cho cửa, vật liệu đất sét mịn được sử dụng tại các mép tiếp xúc giữa cửa, mặt đáy và hai mặt bên. Khi thực hiện thí nghiệm mô phỏng, cửa đột ngột nâng lên với thời gian đủ ngắn, thể tích nước đổ xuống theo thời gian tạo nên dòng chảy sau vỡ đập. Thí nghiệm vật lý được tiến hành với trường hợp chiều cao cột nước ban đầu $h_0 = 6\text{cm}$, sau đập là đáy khô, phẳng và nhẵn. Trên mặt trước có kẻ các đường lưới để xác định tọa độ đường mặt nước khi mô phỏng. Một máy quay tốc độ đủ nhanh được đặt ở mặt trước để ghi lại tung độ đường mặt nước tại các thời điểm khác nhau.



Hình 1. Đường tung độ mặt nước tại thời điểm 0,25 s cho trường hợp chiều cao cột nước ban đầu 6 cm của thí nghiệm vật lý.

Thí nghiệm mô hình số và mô hình giải tích được thiết lập tương ứng với điều kiện biên và điều kiện ban đầu như mô hình vật lý. Kết quả kiểm chuẩn mô hình số với mô hình giải tích và mô hình vật lý được thể hiện trên hình 2.



Hình 2. Kiểm chuẩn mô hình số – giải tích – vật lý cho trường hợp $h_0 = 6\text{ cm}$, đáy phẳng nhẵn.

Tại hình 2, kết quả tung độ mặt nước sau vỡ đập trên đáy phẳng nhẵn (độ nhám = 0) tại thời điểm $t = 0,25\text{ s}$ của mô hình số và thí nghiệm vật lý khá tương đồng do mô hình số mô phỏng khá đầy đủ hiện tượng tự nhiên của dòng chảy. Mô hình giải tích do có nhiều giả thiết đơn giản hoá bản chất

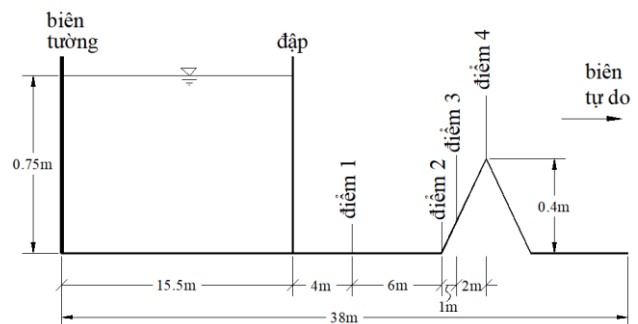
hiện tượng dòng chảy để thể hiện bằng các hàm toán học cho nên kết quả là tung độ mặt nước luôn là đường cong trơn, đặc biệt khi lưới tính toán đủ nhỏ.

Tuy nhiên, nhìn chung kết quả tung độ mặt nước của ba mô hình là khá phù hợp, thể hiện mô hình số Flow 3D mô phỏng tốt hiện tượng dòng chảy sau vỡ đập, có thể ứng dụng mô phỏng các thí nghiệm khác tương tự và phức tạp hơn.

4. Mô phỏng tương tác dòng chảy với đáy hạ lưu phức tạp

4.1. Đáy hạ lưu có khối tam giác

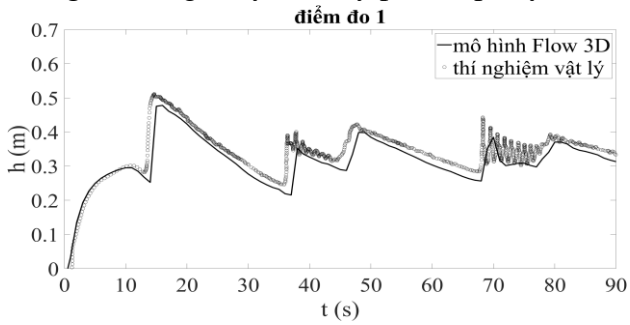
Mô hình số được ứng dụng để mô phỏng dòng chảy sau vỡ đập qua đáy có khối tam giác. Đây là thí nghiệm mô hình vật lý tỷ lệ lớn [1], miền tính toán dài 38 m, cửa đập cách đáy thượng lưu 15,5 m. Chiều cao nước phía đập là 0,75 m, sau đập là đáy khô. Phía đáy hạ lưu đập xuất hiện một khối tam giác cân nhô cao 0,4 m, rộng 6 m và đỉnh tam giác cách cửa đập 13 m. Các thông số mô hình được thiết lập: Biên trái là tường, biên phải là tự do, hệ số nhám Manning là $0,0125\text{ m}^{-1/3}$ s, kích thước lưới là 5 cm và thời gian mô phỏng là 90 s. Kết quả mô phỏng chiều cao dòng chảy theo thời gian của mô hình số được so sánh với kết quả từ mô hình vật lý [1] tại 04 điểm đo cách cửa lần lượt 4 m, 10 m, 11 m, 13 m như thể hiện trên hình 3. Điểm đo 1 và 2 nằm trên đáy bằng, điểm đo 3 nằm trên mái dốc trái của khối tam giác và điểm đo 4 nằm trên đỉnh khối tam giác.



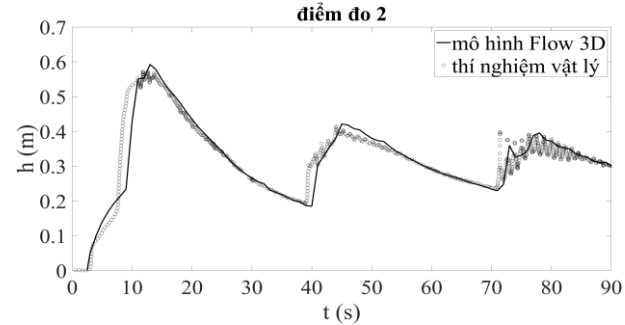
Hình 3. Miền tính toán mô phỏng dòng chảy trên nền đáy có khối tam giác [1].

Hình 4 thể hiện kết quả mô phỏng số và số liệu thí nghiệm vật lý của chiều sâu dòng chảy theo thời gian. Nhìn chung, kết quả từ mô hình số khá phù hợp với số liệu thí nghiệm, cho thấy mô hình

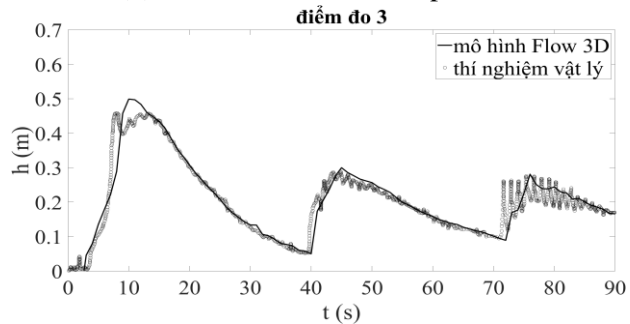
số Flow 3D mô phỏng được tốt các hiện tượng tương tác dòng chảy với đáy phức tạp này.



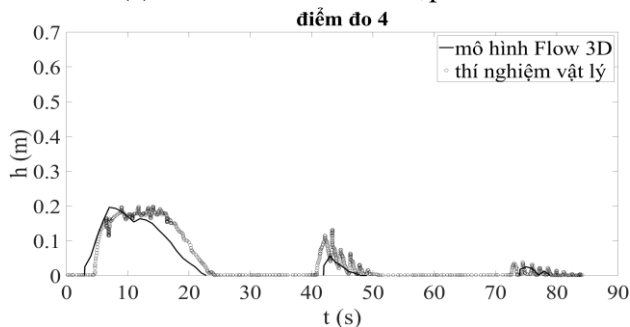
(a) Điểm đo 1 cách cửa đập 4 m.



(b) Điểm đo 2 cách cửa đập 10 m.



(c) Điểm đo 3 cách cửa đập 11 m.

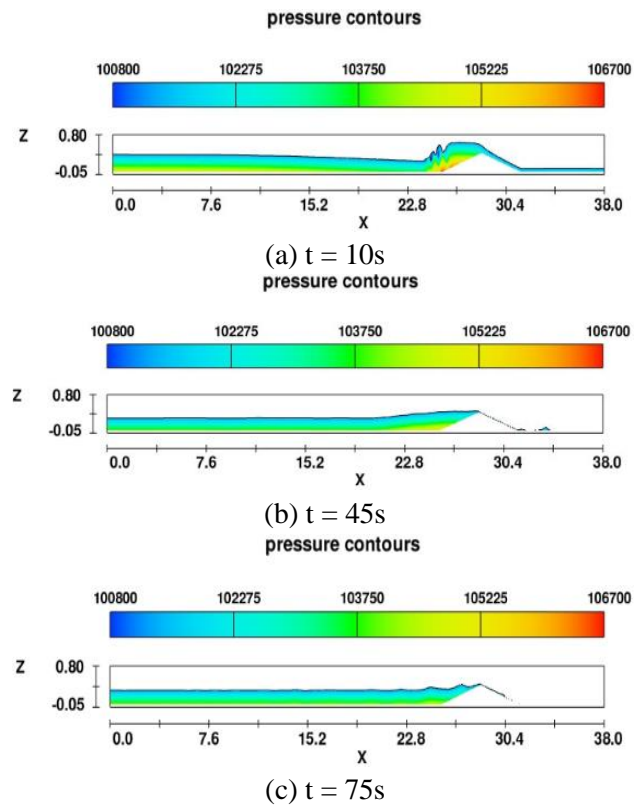


(d) Điểm đo 4 cách cửa đập 13 m.

Hình 4. Kết quả mô phỏng chiều sâu dòng chảy trên nền đáy hạ lưu với khối tam giác; kết quả từ thí nghiệm vật lý [1] và mô hình số Flow 3D.

Tại những bước thời gian đầu, ngay sau khi vỡ đập, nước chảy từ bề thượng lưu về hạ lưu như dòng chảy lũ. Khi dòng chảy gặp mái dốc trái của đáy tam giác, nước leo lên mái dốc trái và vượt qua đỉnh tam giác chảy tràn sang mái dốc phải và thoát ra ngoài biên tự do một phần (hình 5a tại

thời điểm $t = 10$ s). Dưới tác dụng của đáy tam giác, dòng chảy hình thành sóng phản xạ truyền về phía biên thượng lưu. Sóng gập biên thượng lưu phản xạ lại nguyên vẹn và tạo sóng tới truyền về phía đáy hạ lưu (hình 5b tại thời điểm $t = 45$ s và hình 5c tại thời điểm $t = 75$ s), quá trình lặp lại đến khi mực nước không vượt qua được đỉnh đáy tam giác hạ lưu. Theo kết quả mô phỏng trên hình 4 b, c, d tương ứng ở các điểm đo 2, 3 và 4, trong khoảng 90 s mô phỏng, hình thành 03 con sóng phản xạ tại các thời điểm tương ứng $t = 10$ s, 40 s và 70 s. Từ kết quả mô phỏng cho trường hợp đáy khối tam giác phức tạp này, mô hình số có thể mô phỏng chính xác cho những trường hợp ngập lụt phức tạp hơn phía hạ lưu như khu đô thị hay công trình cơ sở hạ tầng.

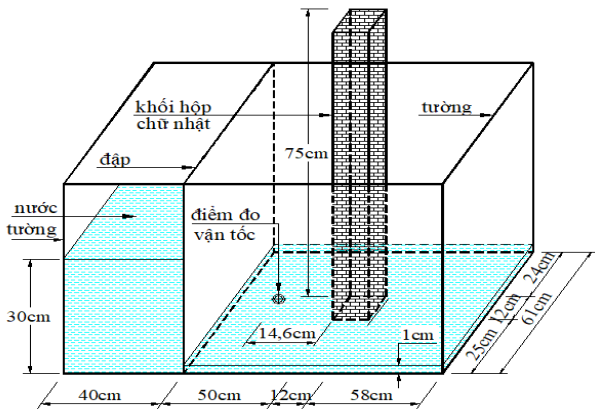


Hình 5. Kết quả mô phỏng trường áp suất dòng chảy qua đáy có khối tam giác tại thời điểm 10 s, 45 s và 75 s sử dụng mô hình số Flow 3D.

4.2. Đáy hạ lưu có khối hộp chữ nhật

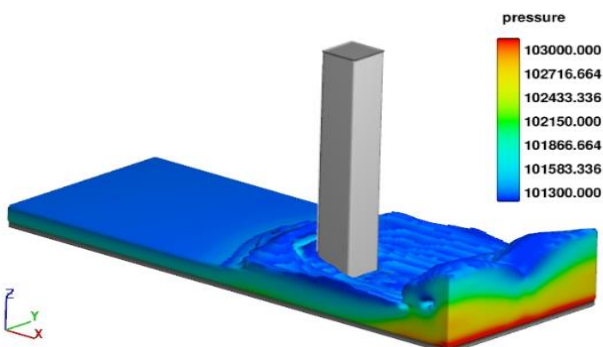
Với trường hợp đáy hạ lưu có khối tam giác, thí nghiệm mô hình số được thiết lập là dạng hai chiều, các thông số theo phương y là giống nhau. Để tiếp tục mô phỏng hiện tượng ngập lụt phía hạ lưu của các công trình hạ tầng ba chiều giống như thực tế, thí nghiệm mô phỏng tương tác dòng

chảy sau vỡ đập với khối đặc hình hộp chữ nhật được thực hiện trong nghiên cứu này. Thí nghiệm được thực hiện dựa trên mô hình thí nghiệm vật lý [19] mô phỏng tương tác dòng chảy với khối đặc hình hộp chữ nhật kích thước $b \times l \times h = 12 \times 12 \times 75$ cm được đặt ở gần giữa bể thí nghiệm có kích thước $B \times L \times H = 61 \times 160 \times 40$ cm (hình 6). Khối nước sau đập cho chiều cao ban đầu 30 cm, dài 40 cm và chiếm hết bề rộng 61 cm. Khối nước trước đập có chiều cao 1 cm và chiếm hết phần bể chứa còn lại. Biên trên được thiết lập là biên không khí, các biên còn lại được thiết lập là tường cứng. Hệ số nhám Manning được lấy là $0,01 \text{ m}^{-1/3}$.

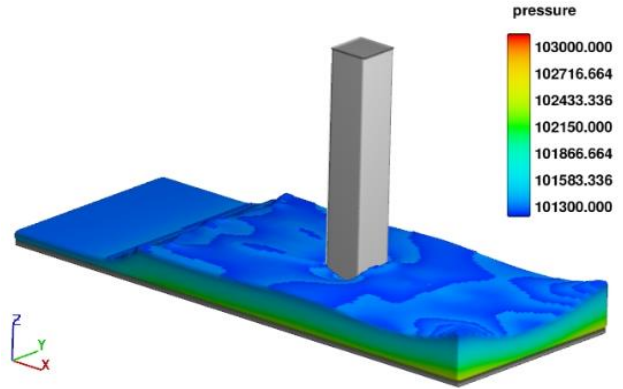


Hình 6. Miền tính toán mô phỏng tương tác dòng chảy với khối hộp chữ nhật [18].

Khi cửa đập được mở, khối nước sau đập đổ xuống khối nước trước đập hình thành nên dòng chảy tương tác với khối hộp chữ nhật, sau đó tiến về biên tường phải (hình 7a). Sau tương tác với biên phải, sóng phản xạ hình thành tiếp tục dội ngược trở lại tương tác với khối hộp chữ nhật (hình 7b). Để đo vận tốc dòng chảy trước và sau tương tác, một điểm đo được đặt cách mặt trước khối hộp một khoảng $l = 14,6$ cm, có tọa độ $(x; y; z) = (75,4; 31; 2,6)$ cm.



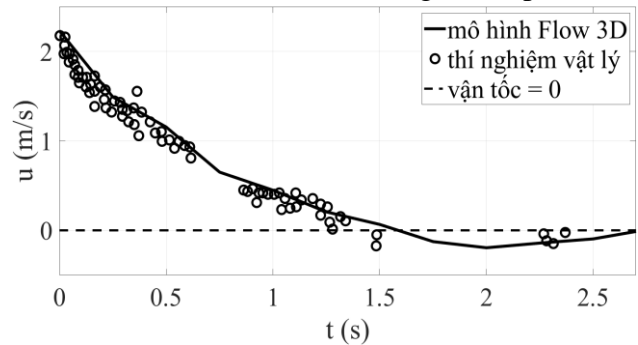
(a) $t = 1s$



(b) $t = 2s$

Hình 7. Kết quả mô phỏng trường áp suất khi dòng chảy tương tác với khối hộp tại thời điểm 1s và 2s.

Kết quả mô phỏng diễn biến của vận tốc dòng chảy tại điểm đo vận tốc theo thời gian được thể hiện trên hình 8. Theo đó, từ 0 s đến 1,6 s dòng chảy di chuyển từ cửa đập sang biên phải và phản xạ ngược trở lại nhưng chưa tới điểm đo nên giá trị vận tốc dương. Từ 1,6 s đến 2,5 s dòng phản xạ đi qua điểm đo, được thể hiện bằng giá trị vận tốc âm. Có thể thấy đường biểu diễn giá trị vận tốc hoàn toàn phù hợp với kết quả mô phỏng ở hình 7 và kết quả từ thí nghiệm vật lý tại hình 8. Từ đó cho thấy, mô hình Flow 3D mô phỏng chính xác đặc trưng dòng chảy trước tương tác và sau tương tác với khối cột hình chữ nhật. Mô hình có thể tiếp tục mô phỏng với các trường hợp ngập lụt đô thị với nhiều cơ sở hạ tầng kết hợp.



Hình 8. Kết quả mô phỏng biến đổi vận tốc dòng chảy trước và sau tương tác tại điểm đo vận tốc.

5. Kết luận

Bài báo đã trình bày bài toán mô phỏng tương tác dòng chảy sau vỡ đập với trường hợp đáy hạ lưu phức tạp, có nhám. Mô hình số Flow 3D được lựa chọn để mô phỏng đặc trưng dòng chảy sau vỡ đập và tương tác với đáy phức tạp. Trong nghiên

cứu này, mô hình số được kiểm chuẩn bằng mô hình thí nghiệm vật lý và mô hình giải tích cho bài toán dòng chảy vỡ đập qua đáy phẳng, không nhám. Mô hình số sau kiểm chuẩn được ứng dụng mô phỏng tương tác dòng chảy sau vỡ đập với đáy nhám phức tạp có khối tam giác và khối hộp chữ nhật. Với bài toán mô phỏng thứ nhất, mô hình số Flow 3D đã mô phỏng chính xác chiều sâu dòng chảy tràn qua đáy có khối tam giác cũng như sóng phản xạ từ biên.

Với bài toán mô phỏng thứ hai, tương tác dòng chảy ba chiều với khối hộp chữ nhật được mô phỏng phù hợp với thí nghiệm vật lý, đặc biệt là trị số và chiều của vận tốc dòng chảy. Mô hình số Flow 3D được lựa chọn có thể tiếp tục mô phỏng cho các trường hợp đáy phức tạp hơn và bài toán vỡ đập trong thực tế.

Tài liệu tham khảo

- [1] F. Belkhandoun, L. Monthe, I. Elmahi; “A splitting finite volume Roe scheme for shallow water equations with source terms”. *Concerted action on dam-break modelling*; Wallingford, United Kingdom: European Communities. 1999; 63–88.
- [2] D. Liang; “Evaluating shallow water assumptions in dam-break flows”; in *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Water Management*. 2010; 163(5):227–237. DOI:10.1680/wama.2010.163.5.227.
- [3] V. K. Pham, V. N. Vu, C. Lee; “Numerical simulation of tsunami due to submarine landslide using extended Boussinesq equations”; in *Proceedings of the 10th International Conference on Asian and Pacific Coasts (APAC 2019)*; 25-28 September 2019; Hanoi, Vietnam. 2019; pp.35-39.
- [4] P. V. Khôi; “Mô hình số tích hợp mô phỏng sạt lở đất ngầm tạo sóng thần: Kiểm chuẩn cho bài toán một chiều”. *Tạp chí Khoa học công nghệ Hàng hải*. 2022; 69:62–66.
- [5] A. Mangeney, P. Heinrich, R. Roche; “Analytical Solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models”. *Pure and Applied Geophysics*. 2020; 157(6–8):1081–1096. DOI:10.1007/s000240050018.
- [6] C. Ancey, R. M. Iverson, M. Rentschler, R. P. Denlinger; “An exact solution for ideal dam-break floods on steep slopes: dam-break problem on sloping bed”. *Water Resour. Res.* 2008; 44(1):1-10. DOI: 10.1029/2007WR006353.
- [7] A. Schoklitsch; “über Dambruchwellen. Sitzungberichten der Königliche Akademie der Wissenschaften”. 1917; 126:1489–1514.
- [8] A. Feizi Khankandi, A. Tahershamsi, S. Soares-Frazaõ; “Experimental investigation of reservoir geometry effect on dam-break flow”. *Journal of Hydraulic Research*. 2012; 50(4):376–387. DOI:10.1080/00221686.2012.690974.
- [9] Q. Liang, F. Marche; “Numerical resolution of well-balanced shallow water equations with complex source terms”. *Advances in Water Resources*. 2009; 32 (6):873–884. DOI:10.1016/j.advwatres.2009.02.010.
- [10] V. K. Pham, C. Lee, V. N. Vu; “Numerical Simulation of Subaerial and Submarine Landslides Using the Finite Volume Method in the Shallow Water Equations with (b, s) Coordinate”. *J Korean Soc Coast Ocean Eng*. 2019; 31(4):229–239. DOI:10.9765/KSCOE.2019.31.4.229.
- [11] J. Paik; “A high resolution finite volume model for 1D debris flow”. *Journal of Hydro-environment Research*. 2015; 9(1):145–155. DOI: 10.1016/j.jher.2014.03.001.
- [12] X. Xia, Q. Liang; “A new depth-averaged model for flow-like landslides over complex terrains with curvatures and steep slopes”. *Engineering Geology*. 2018; 234:174–191. DOI:10.1016/j.enggeo.2018.01.011.
- [13] P. V. Khôi, V. V. Nghi; “Mô hình dòng chảy ba chiều: lý thuyết, kiểm chuẩn và ứng dụng mô phỏng đập tràn kiểu xi phông”. *Tạp chí Khoa học công nghệ Hàng hải*. 2021; 67:73–77.
- [14] P. V. Khôi, P. T. Ngà, Đ. T. H. Ngọc; “Mô hình dòng chảy ba chiều: công cụ van khí và ứng dụng điều chỉnh lưu lượng xả nước đập tràn xi phông”. *Tạp chí Khoa học công nghệ Hàng hải*. 2022; 69:57-61.
- [15] P. V. Khôi; “Lựa chọn chiều cao đáp ứng hiệu quả tiêu tán sóng đơn của đê chắn sóng tường đứng kết cấu rỗng”. *Tạp chí Khoa học Công nghệ Hàng hải*. 2023; 73: 47–51.

- [16] E. Zhao, Y. Dong, Y. Tang, X. Xia; “Performance of submerged semi-circular breakwater under solitary wave in consideration of porous media”. *Ocean Engineering*.2021; 223:108573. DOI:10.1016/j.oceaneng.2021.108573.
- [17] F. H. Harlow; “Turbulence Transport Equations”. *Phys. Fluids*. 1967; 10(11):2323-2332. DOI:10.1063/1.1762039.
- [18] M. Gómez-Gesteira, R. A. Dalrymple; “Using a Three-Dimensional Smoothed Particle Hydrodynamics Method for Wave Impact on a Tall Structure”. *J. Waterway Port Coastal Ocean Eng.* 2004; 130(2):63–69. DOI:10.1061/(ASCE)0733-950X(2004)130:2(63).