



## Ảnh hưởng của lỗ rỗng và vết nứt tới dao động tự do của tấm FGM có chiều dày thay đổi Parabol

### Effect of voids and cracks on free vibration of FGM plate with parabolic variable thickness

Vũ Nguyên Thành<sup>1</sup>, Phạm Minh Phúc<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải

Từ khóa:

Dao động tự do  
Lỗ rỗng  
Vết nứt  
Tấm FGM  
Chiều dày thay đổi  
Phase-field

TÓM TẮT

Bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích dao động tự do của tấm hình chữ nhật. Tấm được làm bằng vật liệu cơ tính biến thiên với quy luật hàm mũ và chiều dày tấm thay đổi theo dạng parabol. Áp dụng lý thuyết Phase-Field để mô tả trạng thái của vật liệu khi vết nứt xuất hiện ở tâm của tấm. Để đảm bảo độ tin cậy của kết quả, bài báo đã tiến hành so sánh một số kết quả với các nghiên cứu uy tín. Việc phân tích dao động tự do của tấm phụ thuộc vào thành phần vật liệu, chiều dài vết nứt, góc nghiêng vết nứt, hình dạng tấm (tỉ lệ các cạnh, hệ số chiều dày) cũng như hệ số lỗ rỗng được tính toán chi tiết. Kết quả số cho thấy, hệ số lỗ rỗng, tham số thay đổi độ dày cũng như chiều dài vết nứt ảnh hưởng rất lớn tới tần số dao động và dạng dao động của tấm, trong khi đó góc nghiêng của vết nứt có ảnh hưởng ít hơn.

Keywords:

Free vibration  
Voids  
Crack  
FGM Plate  
Thickness variation  
Phase-field  
HSDT

ABSTRACT

The paper uses the high-order shear deformation theory and the finite element method to analyze the free vibration of rectangular plates. The plate is made of functionally graded materials following an exponential law, with thickness varying parabolically. The Phase-Field theory is applied to describe the state of the material when a crack appears at the center of the plate. To ensure the reliability of the results, the paper compares some results with reputable studies. The analysis of the free vibration of the plate depends on the material composition, crack length, crack inclination angle, plate shape (edge ratio, thickness coefficient) as well as the void coefficient calculated in detail. The numerical results show that the void coefficient, thickness change parameter as well as the crack length greatly affect the oscillation frequency and oscillation form of the plate, while the crack angle has a relatively smaller impact.

\* Phạm Minh Phúc. Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải  
Email: [phamminhphuc@utc.edu.vn](mailto:phamminhphuc@utc.edu.vn)

[https://www.doi.org/10.55228/JTST.14\(3\).41-52](https://www.doi.org/10.55228/JTST.14(3).41-52)

Ngày nhận bài: 11/02/2025; Ngày nhận bài sửa: 15/04/2025; Ngày chấp nhận đăng: 06/05/2025

Ngày xuất bản trực tuyến: 15/05/2025

pISSN: 1859-4263; eISSN: 3030-4261

## 1. Giới thiệu

Trong quá trình sản xuất tấm cơ tính biến thiên (FGM - Functionally Graded Materials), không thể tránh khỏi xuất hiện lỗ rỗng do những hạn chế của kỹ thuật chế tạo. Thật khó để chế tạo tấm đặc hoàn toàn nhất là phần giữa của tấm FGM mà không có lỗ rỗng. Tuy nhiên, đối với mặt trên và dưới của tấm, các vật liệu có thể dễ dàng thẩm thấu với ít sự hiện diện của lỗ rỗng hơn. Ngoài ra, các lỗ rỗng có thể phát sinh do sự khác biệt về nhiệt độ đồng đặc của hai vật liệu. Do đó, sự tồn tại của lỗ rỗng có thể làm yếu độ bền của vật liệu FGM [1]. Vì vậy, việc xem xét tác động của lỗ rỗng đối với các đặc tính động học của tấm FGM là rất quan trọng. Năm 2021, Kumar và cộng sự [2] nghiên cứu ảnh hưởng của phân bố độ rỗng đến dao động của tấm sử dụng mô hình phần tử hữu hạn phi tuyến dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (First-Order Shear Deformation Theory - FSDT) và quan hệ biến dạng Von-Karman. Phân tích dao động tự do của tấm FGM có lỗ rỗng được một số tác giả nghiên cứu theo các lý thuyết và phương pháp khác nhau: Các nghiên cứu sử dụng FSDT, kết hợp với các biến thể của phương pháp PTHH khác nhau [3] [4] [5], phương pháp Rayleigh-Ritz [6], và phương pháp vi phân bậc hai (differential quadrature method) [7] hay phương pháp đẳng hình học (isogeometric) [8]; lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) được kết hợp với phương pháp Jacobi-Ritz [9] hay PTHH [10].

Tấm có độ dày thay đổi là tấm có độ dày không đều theo chiều dài và chiều rộng. Sự không đồng nhất này có thể là cố ý, chẳng hạn như trong các thiết kế nhằm tối ưu hóa hiệu suất kết cấu. Ví dụ, tăng độ dày ở những vị trí cần thiết để tăng khả năng chịu tải hoặc giảm độ dày ở những vị trí không cần thiết để giảm trọng lượng sản phẩm. Hoặc cũng có thể là do kết cấu ở những vị trí cần thiết để tăng tính thẩm mỹ cho công trình. Loại tấm này đã được

một số nhà khoa học chú ý và nghiên cứu. Sử dụng lý thuyết tấm mỏng cổ điển (lý thuyết tấm Kirchhoff), kỹ thuật không gian trạng thái và phương pháp Levy, Xiang và Wang [11] đã phân tích tải trọng uốn và tần số dao động của các tấm hình chữ nhật. Trong nghiên cứu này, các tác giả đã thành lập các phương trình dựa trên lý thuyết tấm cổ điển với phương pháp phi tuyến tính hình học kiểu von-Karman. Sử dụng lý thuyết Eringen kết hợp với lý thuyết tấm cổ điển phi cục bộ, Akiyama và cộng sự [12] đã khám phá tần số dao động của các tấm nano trực giao có độ dày thay đổi. Shufrin và Eisenberger [13] đã phân tích dao động tự do của tấm có độ dày thay đổi bằng cách sử dụng FSDT và HSDT. Sử dụng phương pháp Frobenius, Saeidifar và cộng sự [14] đã xác định tải uốn cho một tấm hình chữ nhật đàn hồi với sự thay đổi về độ dày, mô đun đàn hồi và mật độ. Thai và cộng sự [15] đã sử dụng lý thuyết tấm tinh chỉnh hai biến và nguyên lý Hamilton để tính toán tần số dao động tự do của các tấm trực giao. Gần đây (2023), Le và Nguyen [16] đã sử dụng FSDT và lý thuyết Phase-Field để nghiên cứu dao động tự do của tấm hình chữ nhật có vết nứt với độ dày thay đổi parabol.

Các kết cấu dạng tấm được sử dụng khá phổ biến trong nhiều lĩnh vực hàng hải, cơ khí, xây dựng... Trong quá trình sử dụng, tấm có thể xuất hiện vết nứt do hư hỏng cục bộ, đặc biệt tấm có lỗ rỗng thì khả năng xuất hiện vết nứt càng cao. Để xác định mức độ hư hỏng, cần phải đánh giá lại khả năng làm việc của kết cấu tại thời điểm đó. Các nhà khoa học đã đưa ra một số lý thuyết và các phương pháp nghiên cứu về vấn đề này như phân tích đẳng hình học, phương pháp PTHH, phương pháp PTHH mở rộng... Gần đây, Phuc và cộng sự [17] [18] [19] [20] [21] [22] đã sử dụng lý thuyết Phase-field và phương pháp PTHH để phân tích độ ổn định và dao động tự do cho tấm chữ nhật bị nứt.

Theo hiểu biết của tác giả, chưa có tác giả nào nghiên cứu dao động tự do của tấm FGM có lỗ rỗng và vết nứt với độ dày tấm thay đổi dạng parabol. Bài báo sẽ tập trung vào việc tính toán tần số dao động của tấm tùy thuộc vào tham số lỗ rỗng; tỷ lệ thành phần vật liệu; tham số hình dạng tấm: tỉ lệ cạnh, sự thay đổi độ dày parabol; chiều dài và góc nghiêng của vết nứt.

## 2. Lý thuyết và các phương trình

Tấm FGM làm từ gốm và kim loại được nghiên cứu với chiều dài (a), chiều rộng (b) và chiều dày thay đổi theo trục x, ký hiệu  $h(x)$ , trong hệ tọa độ Đề-các Oxyz như minh họa trong Hình 1. Vật liệu FGM ở đây có thể tích biến đổi theo quy luật lũy thừa trong công thức (1a):

$$V_c = \left( \frac{z}{h(x)} + \frac{1}{2} \right)^n; V_m = 1 - V_c \quad (1a)$$

trong đó  $n$  là chỉ số lũy thừa ( $n \geq 0$ ) xác định sự biến thiên của vật liệu theo chiều dày

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + \frac{5}{4} \left( z - \frac{4}{3h^2(x)} z^3 \right) \theta_x(x, y, t) + \left( \frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2(x)} z^3 \right) w_{0,x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + \frac{5}{4} \left( z - \frac{4}{3h^2(x)} z^3 \right) \theta_y(x, y, t) + \left( \frac{1}{4} z - \frac{5}{3h^2(x)} z^3 \right) w_{0,y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2)$$

Trong đó,  $u, v, w$  lần lượt biểu thị các chuyển vị tại mặt phẳng trung bình của tấm theo các trục  $x, y, z$ ;  $\theta_x, \theta_y$  là các góc quay theo trục  $x$  và  $y$ .

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= u_{0,x} + z \frac{1}{4} (5\theta_{x,x} + w_{,xx}) + z^3 \left( \frac{-5}{3h^2} \right) \left[ \theta_{x,x} + w_{,xx} + \left( \frac{-2}{h} \right) h_{,x} (\theta_x + w_{,x}) \right] \\ \epsilon_y &= v_{0,y} + z \frac{1}{4} (5\theta_{y,y} + w_{,yy}) + z^3 \left( \frac{-5}{3h^2} \right) (\theta_{y,y} + w_{,yy}) \\ \epsilon_{xy} &= u_{0,y} + v_{0,x} + z \frac{1}{4} (5\theta_{x,y} + 2w_{,xy} + 5\theta_{y,x}) + z^3 \left( \frac{-5}{3h^2} \right) \left[ \theta_{x,y} + 2w_{,xy} + \theta_{y,x} + \left( \frac{-2}{h} \right) h_{,x} (\theta_y + w_{,y}) \right] \\ \gamma_{yz} &= \frac{5}{4} (\theta_y + w_{,y}) + z^2 \left( \frac{-5}{h^2} \right) (\theta_y + w_{,y}); \quad \gamma_{xz} = \frac{5}{4} (\theta_x + w_{,x}) + z^2 \left( \frac{-5}{h^2} \right) (\theta_x + w_{,x}) \end{aligned} \quad (3)$$

của tấm FGM, và  $z$  là tọa độ theo chiều dày ( $-h(x)/2 \leq z \leq h(x)/2$ ).

Khi tấm có lỗ rỗng thì các thuộc tính vật liệu theo công thức (1b):

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c - \frac{e}{2}(P_c + P_m) \quad (1b)$$

Ở đây,  $P_c$  và  $P_m$  tương ứng là mô đun Young, hệ số Poisson và khối lượng riêng của vật liệu của gốm và kim loại;  $e$  là hệ số rỗng của vật liệu trong tấm.

Trong bài báo này, lý thuyết biến dạng cắt bậc ba [17] được áp dụng để nghiên cứu; trường chuyển vị của điểm bất kỳ trong tấm được viết dưới dạng (2):

Vì chiều dày của tấm thay đổi dọc theo trục  $x$  theo hàm  $h(x)$ , các biến dạng liên quan đến chuyển vị trong phương trình (2) được viết trong biểu thức (3):

Mối quan hệ giữa ứng suất pháp và ứng suất cắt đối với các biến dạng và thành phần cắt trong tấm FGM, tuân theo lý thuyết đàn hồi tuyến tính, có thể được biểu diễn như sau:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_m (\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + z^3\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}) \\ \boldsymbol{\tau} = \mathbf{D}_s (\boldsymbol{\gamma}^{(0)} + z^2\boldsymbol{\gamma}^{(2)}) \end{cases} \quad (4)$$

Trong đó:

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T; \quad \boldsymbol{\tau} = [\tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T$$

$$\mathbf{D}_m = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{D}_s = \frac{E(z)}{2[1+\nu(z)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cần lưu ý rằng phương trình (4) biểu thị các thành phần biến dạng và cắt được tạo ra từ phương trình (3) của chuyển vị trong tấm [17].

Lực pháp tuyến, mô men uốn, mô men bậc cao và lực cắt có thể được tính toán và biểu diễn thông qua các phương trình sau:

$$U(\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \begin{aligned} & \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ & + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \\ & + \boldsymbol{\gamma}^{(0)T} \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}^{(0)T} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)T} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)T} \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \end{aligned} \right) d\Omega \quad (8)$$

### 3. Lý thuyết Phase-field mô phỏng trạng thái vật liệu

Trong lý thuyết Phase-field của cơ học phá hủy [17], trạng thái của vật liệu được biểu diễn bằng biến Phase-field  $s$ , trong đó  $s = 0$  nếu có vết nứt và  $s = 1$  nếu vật liệu không bị suy giảm tính chất. Khi  $s$  nằm trong khoảng từ 0 đến 1, vật liệu ở trạng thái mềm hóa, tức là trạng thái chuyển tiếp giữa trạng thái bình thường và trạng thái có vết nứt. Do đó,  $s$  có thể được coi là một tham số vết nứt trong các

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{N}} \\ \hat{\mathbf{M}} \\ \hat{\mathbf{P}} \\ \hat{\mathbf{Q}} \\ \hat{\mathbf{R}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{E} & 0 & 0 \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{F} & 0 & 0 \\ \mathbf{E} & \mathbf{F} & \mathbf{H} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{D}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(0)} \\ \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Với:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \mathbf{D}_m dz, \\ (\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{H}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (z^3, z^4, z^6) \mathbf{D}_m dz \\ (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{B}}, \bar{\mathbf{D}}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) \mathbf{D}_s dz \end{aligned} \quad (7)$$

Theo lý thuyết đàn hồi, năng lượng biến dạng của tấm FGM có thể được biểu diễn như sau (8):

mô hình đàn hồi phá hủy. Tham số  $s$  này được xem là một biến trong công thức hàm năng lượng, do đó khi năng lượng biến dạng giảm thì vết nứt trong tấm có thể xuất hiện.

Khi tấm bị nứt, tổng năng lượng biến dạng của tấm do lực pháp tuyến, mô men uốn, mô men bậc cao và lực cắt có thể được viết dưới dạng (9):

$$U(\mathbf{d}, s) = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} s^2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{F} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)T} \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} + \right. \\ & \left. + \boldsymbol{\gamma}^{(0)T} \bar{\mathbf{A}} \boldsymbol{\gamma}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}^{(0)T} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)T} \bar{\mathbf{B}} \boldsymbol{\gamma}^{(0)} + \boldsymbol{\gamma}^{(2)T} \bar{\mathbf{D}} \boldsymbol{\gamma}^{(2)} \right) d\Omega \\ & + \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4l_0} + l_0 |\nabla s|^2 \right] d\Omega \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$= \left\{ \int_{\Omega} s^2 \boldsymbol{\Psi}(\mathbf{d}) d\Omega + \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4l_0} + l_0 |\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\}$$

Trong đó,  $\mathbf{d}$  được sử dụng để biểu thị vector chuyển vị,  $G_c$  là tốc độ giải phóng năng lượng tới hạn trong lý thuyết của Griffith [17], và  $l_0$  là chiều rộng vết nứt.

Động năng của tấm được biểu diễn dưới dạng (10):

$$T(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_V s^2 \rho(z) (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dV$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int s^2 \left\{ \begin{aligned} & (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) I_0 + \frac{1}{2} \left[ 5(\dot{u}_0 \dot{\theta}_x + \dot{v}_0 \dot{\theta}_y) + \dot{u}_0 \dot{w}_{,x} + \dot{v}_0 \dot{w}_{,y} \right] I_1 \\ & + \frac{1}{16} \left[ \dot{w}_{,x}^2 + 25(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + 10(\dot{\theta}_x \dot{w}_{,x} + \dot{\theta}_y \dot{w}_{,y}) + \dot{w}_{,y}^2 \right] I_2 \\ & - \frac{10}{3h^2} (\dot{u}_0 \dot{\theta}_x + \dot{u}_0 \dot{w}_{,x} + \dot{v}_0 \dot{\theta}_y + \dot{v}_0 \dot{w}_{,y}) I_3 \\ & - \frac{10}{12h^2} \left[ \dot{w}_{,x}^2 + 5(\dot{\theta}_x^2 + \dot{\theta}_y^2) + 6(\dot{\theta}_x \dot{w}_{,x} + \dot{\theta}_y \dot{w}_{,y}) + \dot{w}_{,y}^2 \right] I_4 \\ & + \frac{25}{9h^4} \left[ \dot{w}_{,x}^2 + \dot{\theta}_x^2 + 2(\dot{\theta}_x \dot{w}_{,x} + \dot{\theta}_y \dot{w}_{,y}) + \dot{\theta}_y^2 + \dot{w}_{,y}^2 \right] I_6 \end{aligned} \right\} d\Omega \quad (10)$$

Với:

$$I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^i dz ; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 6 \quad (11)$$

Dựa vào các biểu thức trên, hàm Lagrangian cho tấm FGM có thể được biểu diễn như sau:

$$L(\mathbf{d}, s) = T(\mathbf{d}, s) - U(\mathbf{d}, s)$$

$$\Rightarrow L(\mathbf{d}, s) = \int_{\Omega} s^2 \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{d}) d\Omega - \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4l} + l |\nabla s|^2 \right] d\Omega \quad (12)$$

Biến phân bậc nhất của hàm khả vi được tính như sau:

$$\begin{cases} \delta L(\mathbf{d}, s, \delta \mathbf{d}) = 0 \\ \delta L(\mathbf{d}, s, \delta s) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Do đó, giá trị riêng và hàm dạng được cho bởi phương trình:

$$\begin{cases} (\sum \mathbf{K}^e + \omega^2 \sum \mathbf{M}^e) \mathbf{d} = 0 \\ \int_{\Omega} 2s \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{d}) \delta s d\Omega - \int_{\Omega} 2G_c h \left[ \frac{(s-1) \delta s}{4l_0} + l_0 \nabla s \nabla (\delta s) \right] d\Omega = 0 \end{cases} \quad (14)$$

$$(15)$$

#### 4. Kết quả và thảo luận

Theo các công thức trong mục 3, hình dạng vết nứt được xác định bằng hàm  $\Gamma(\mathbf{d})$  theo [17] như sau:

$$\Gamma(\mathbf{d}) = B \frac{G_c}{4l_0} \cdot K_0(x, y) \quad (16)$$

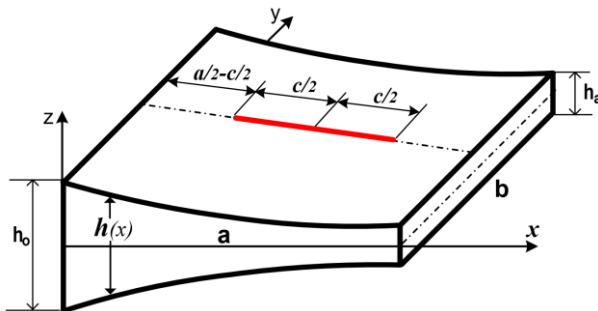
ở đây:

$$K_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq l_c \text{ and } -\frac{l_0}{2} \leq y \leq \frac{l_0}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (17)$$

Với đại lượng vô hướng  $B=1000$ ;  $l_c$  là chiều dài vết nứt;  $l_0$  dùng để kiểm soát độ rộng của vùng nứt với [17].

Sau khi tính giá trị hình dạng vết nứt từ phương trình (16), ta có thể xác định biến Phase-field ( $s$ ) từ phương trình (15) và thay vào phương trình (14), từ đó có thể tính giá trị riêng  $\omega$ , chính là tần số dao động của tấm với dạng dao động tương ứng.

#### 4.1. Dao động tự do của tấm đồng nhất với chiều dày thay đổi theo hàm parabol.



Hình 1. Hình dạng tấm với chiều dày thay đổi parabol theo trục x.

Trong phần này, dao động tự do của tấm có vết nứt với chiều dày thay đổi theo hàm parabol được phân tích và so sánh với nghiên cứu của Le và cộng sự [16]. Tấm được làm từ thép không gỉ (SUS304), với mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson tương ứng là:  $E = 201.04GPa$ ;  $\rho = 8166kg / m^3$ ;  $\nu = 0.3$ .

Chiều dày của tấm thay đổi theo trục x theo quy luật bậc hai (Hình 1):  $h(x) = h_0(\mu\xi^2 - 2\mu\xi + 1)$ , với  $\mu = 1 - h_a / h_0$ . Tấm vuông có kích thước cạnh:  $a = b = 0.5m$ ; chiều dày  $h_0 = 0.005m$ . Vết nứt ở giữa tấm, song song với trục x và có chiều dài là c. Tham số tần số dao động tự do của tấm được tính theo công thức [16]:

$$\tilde{\omega} = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_0} / \pi^2 \quad (18)$$

$$\text{Với } D_0 = E h_0^3 / (12(1 - \nu^2)). \quad (19)$$

Bảng 1. Tham số tần số dao động tự do của tấm nứt có chiều dày thay đổi theo hàm parabol.

Tỉ số chiều dài vết nứt (c/a)	Tỉ số chiều dày tấm ( $h_a/h_0$ )								
	0.9			0.7			0.5		
	Bài báo	Le [16]	Sai lệch	Bài báo	Le [16]	Sai lệch	Bài báo	Le [16]	Sai lệch
0	1.86653	1.86601	0.03%	1.59653	1.59556	0.06%	1.31962	1.31854	0.08%
0.2	1.82082	1.81979	0.06%	1.55987	1.5588	0.07%	1.29389	1.29279	0.09%
0.4	1.72489	1.72443	0.03%	1.48332	1.4828	0.04%	1.23881	1.23825	0.05%
0.6	1.62898	1.62882	0.01%	1.40699	1.40684	0.01%	1.18346	1.18319	0.02%

Bảng 1 thể hiện tham số tần số của tấm với các tỷ số chiều dày, chiều dài vết nứt khác nhau và điều kiện biên của tấm tựa đơn ở bốn

cạnh. Có thể thấy rằng sai số giữa kết quả của bài báo này và nghiên cứu của Le và cộng sự

[16] là rất nhỏ, cho thấy chương trình tính toán trong nghiên cứu này có độ tin cậy cao.

4.2. Dao động tự do của tấm FGM có lỗ rỗng.

Trong phần này, tấm FGM có chiều dày không đổi, lỗ rỗng được phân bố đều và với điều kiện biên tựa đơn trên bốn cạnh (SSSS). Các thuộc tính vật liệu FGM (Al, Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>): mô đun

đàn hồi  $E_m = 70\text{ GPa}$ ,  $E_c = 380\text{ GPa}$ ; khối lượng riêng

$$\rho_m = 2707\text{ kg/m}^3, \rho_c = 3800\text{ kg/m}^3; \text{ hệ số}$$

Poisson  $\nu_m = \nu_c = 0.3$ .

Ở đây, tham số tần số của tấm được tính theo công thức (20):

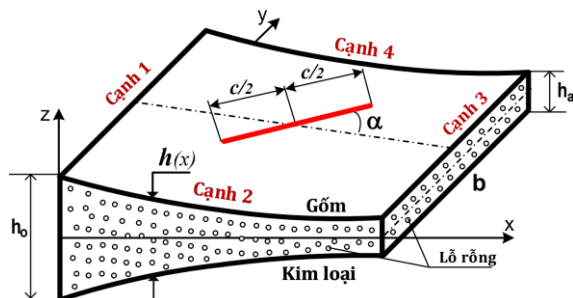
$$\hat{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \tag{20}$$

**Bảng 2.** Tham số tần số dao động tự do của tấm FGM có lỗ rỗng.

Hệ số lỗ rỗng	Chỉ số mũ của vật liệu (n)								
	0			0.5			1		
(e)	Bài báo	Rezaei [23]	Diff. (%)	Bài báo	Rezaei [23]	Diff. (%)	Bài báo	Rezaei [23]	Diff. (%)
0	0.0291138	0.02912	0.02%	0.0246657	0.02467	0.03%	0.02223	0.02237	0.03%
0.2	0.0296226	0.03003	1.37%	0.0243016	0.02456	1.04%	0.02083	0.021038	0.99%
0.4	0.0308483	0.03137	1.67%	0.0238489	0.02423	1.57%	0.017897	0.018173	1.52%

Trong bài báo của Rezaei và cộng sự [23] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất, ở nghiên cứu này nhóm tác giả sử dụng HSDT. Tuy nhiên, sai khác giữa các kết quả khá nhỏ.

4.3. Dao động tự do của tấm FGM có lỗ rỗng và vết nứt với chiều dày thay đổi theo hàm parabol.



**Hình 2.** Mô tả tấm FGM có lỗ rỗng và vết nứt với chiều dày thay đổi parabol.

Trong phần này, tấm FGM có lỗ rỗng phân bố đều được nghiên cứu (Hình 2). Tấm có chiều dày thay đổi theo dạng parabol (giống mục 4.1) được làm bằng vật liệu FGM với mô đun đàn hồi, khối lượng riêng, hệ số poisson giống mục 4.2. Vết nứt được giả định ở giữa tấm với chiều dài c, và nghiêng góc  $\alpha$  so với phương trục x.

Tham số tần số dao động tự do của tấm được tính theo công thức (21):

$$\tilde{\omega}_c = \omega b^2 \sqrt{\rho h_0 / D_c} / \pi^2 \tag{21}$$

$$\text{Với } D_c = E_c h_0^3 / (12(1 - \nu_c^2)). \tag{22}$$

Ở các Bảng 3, 4, 5 được xét với tấm có liên kết đơn ở bốn cạnh (SSSS) và chiều dày lớn nhất của tấm  $h_0 = a / 100$ .

**Bảng 3.** Tham số tần số của tấm FGM có lỗ rỗng phụ thuộc vào tỉ lệ chiều dài vết nứt.

$h_a/h_0$	Tỉ lệ chiều dài vết nứt (c/a)			
	0	0.2	0.4	0.6
0.9	1.14398	1.11826	1.06371	1.00805
0.8	1.06593	1.04266	0.99333	0.94312
0.7	0.98763	0.96696	0.92307	0.87845
0.6	0.90919	0.89131	0.85311	0.81425
0.5	0.83086	0.81598	0.78377	0.75086

Bảng 3 trình bày sự thay đổi của tham số tần số của tấm FGM có lỗ rỗng phụ thuộc vào tỉ lệ chiều dày tấm và chiều dài vết nứt. Ở đây,

xét tấm vuông ( $a = b = 0.5m$ ) có chỉ số mũ của vật liệu  $n = 4$ , hệ số lỗ rỗng  $e = 0.1$ , góc nghiêng vết nứt  $\alpha = 0^\circ$ .

**Bảng 4.** Ảnh hưởng của tỉ lệ cạnh và hệ số lỗ rỗng đến tham số tần số dao động.

Tỉ lệ cạnh ( $a/b$ )	Hệ số lỗ rỗng ( $e$ )			
	0	0.1	0.2	0.4
0.5	2.94878	2.87780	2.78218	2.41726
1	1.17577	1.14676	1.10820	0.96262
1.5	0.84317	0.82143	0.79299	0.68760
2	0.72655	0.70720	0.68216	0.59066

**Bảng 4** thể hiện ảnh hưởng của tỉ lệ cạnh và hệ số lỗ rỗng đến tham số tần số dao động. Tấm được xét có các tham số: chỉ số mũ của vật liệu  $n = 1$ , tỉ lệ chiều dày tấm  $h_a / h_o = 0.7$ , góc nghiêng vết nứt  $\alpha = 0^\circ$ , chiều dài vết nứt  $c / a = 0.3$ .

**Bảng 5.** Ảnh hưởng của góc nghiêng vết nứt đến tham số tần số dao động.

Góc nứt ( $\alpha$ )	Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ )			
	0.2	0.4	0.6	0.8
$0^\circ$	0.95579	0.91225	0.86768	0.83744
$15^\circ$	0.95567	0.91103	0.86315	0.82690
$30^\circ$	0.95538	0.90836	0.85345	0.80424
$45^\circ$	0.95517	0.90768	0.84771	0.78962
$60^\circ$	0.95517	0.90741	0.85196	0.80122
$75^\circ$	0.95607	0.91311	0.87388	0.83430
$90^\circ$	0.95526	0.91021	0.86371	0.83192

**Bảng 5** trình bày ảnh hưởng của góc nghiêng và chiều dài vết nứt đến tham số tần số dao động. Tấm vuông ( $a = b = 0.5m$ ) có chỉ số mũ của vật liệu  $n = 7$ , tỉ lệ chiều dày tấm  $h_a / h_o = 0.8$ , hệ số lỗ rỗng  $e = 0.15$ . Có thể thấy rằng, khi góc nghiêng tăng (trong

khoảng  $45^\circ$  đến  $60^\circ$ ), tần số dao động có xu hướng giảm, sau đó lại tăng nhẹ trở lại.

**Bảng 6.** Tham số tần số dao động phụ thuộc vào điều kiện biên ở các cạnh tấm.

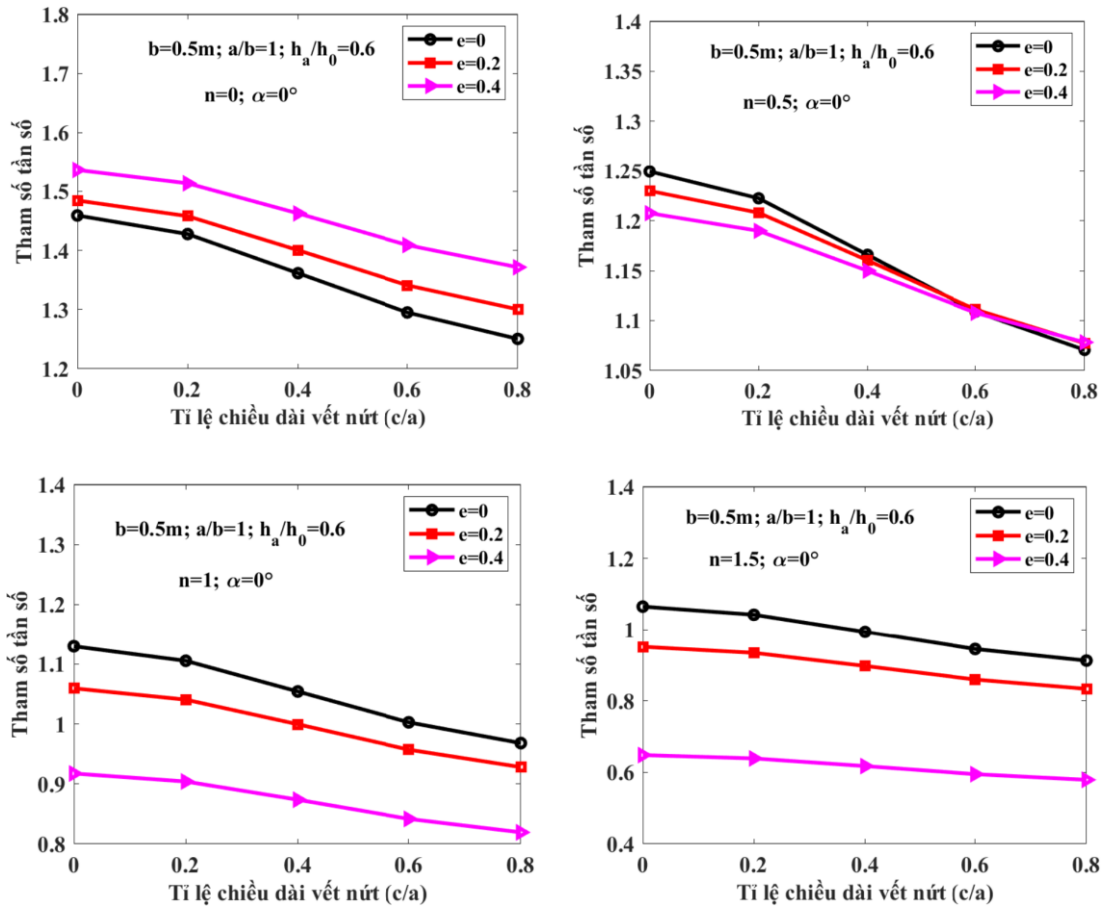
Điều kiện biên	Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ )			
	0	0.2	0.4	0.8
FFCF	0.06958	0.06957	0.06954	0.06931
FCFF	0.12286	0.12230	0.12058	0.11173
CFFF	0.18118	0.18094	0.18062	0.17999
SSSS	0.66299	0.65277	0.62998	0.58977
CFCF	0.77814	0.77890	0.77921	0.77819
CSCS	0.98931	0.98095	0.96272	0.94295
CCCC	1.19748	1.17875	1.14014	1.09840

**Bảng 6** thể hiện tham số tần số dao động phụ thuộc vào chiều dài vết nứt và điều kiện biên ở các cạnh tấm. Tấm có chỉ số mũ của vật liệu  $n = 3$ , tỉ lệ chiều dày tấm  $h_a / h_o = 0.5$ , góc nghiêng vết nứt  $\alpha = 0^\circ$ . Cần chú ý ký hiệu điều kiện biên, ví dụ: CSCF thể hiện cạnh 1 và 3 được liên kết ngàm (C), cạnh 2 liên kết tựa (S), cạnh 4 tự do (F) (**Hình 2**). Dễ dàng thấy, tần số dao động tăng theo thứ tự các điều kiện biên FFCF, FCFF, CFFF, SSSS, CFCF, CSCS, CCCC; được lý giải: Tần số dao động của tấm tỷ lệ thuận với độ cứng tổng thể của hệ. Điều kiện biên càng cứng, độ cứng tổng thể càng cao, làm tăng tần số dao động của tấm. Cũng cần để ý ba điều kiện biên FFCF, FCFF, CFFF đều chỉ có một cạnh có liên kết ngàm nhưng FFCF được ngàm ở vị trí cạnh có độ dày nhỏ nhất nên dễ mất ổn định hơn hai điều kiện biên còn lại.

Có thể nhận thấy rằng khi chiều dài vết nứt tăng làm độ cứng tổng thể của tấm giảm, khả năng kháng lại biến dạng giảm đi, dẫn đến tần số dao động tự nhiên của tấm cũng giảm. Điều này thể hiện rất rõ trong các **bảng 3, 5, 6** và **Hình 3**.

Khi tỉ lệ chiều dày  $h_a / h_o$  giảm, làm cho tấm mỏng hơn dọc theo trục x, có nghĩa độ cứng cục bộ giảm theo, làm tần số dao động giảm nhanh được thể hiện trong **Bảng 3**.

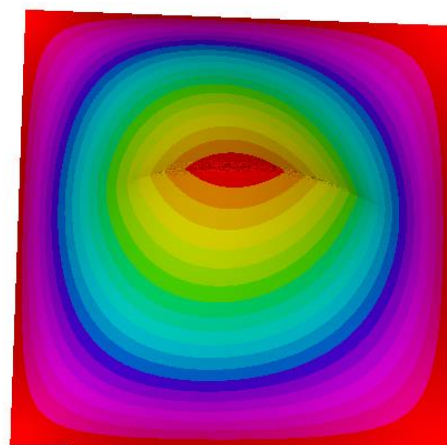
Tỉ lệ cạnh tấm ảnh hưởng lớn tới tần số dao động. Ở **Bảng 4**, tần số dao động giảm nhanh khi tỉ lệ cạnh ( $a/b$ ) tăng được giải thích do làm tăng độ mảnh của tấm.



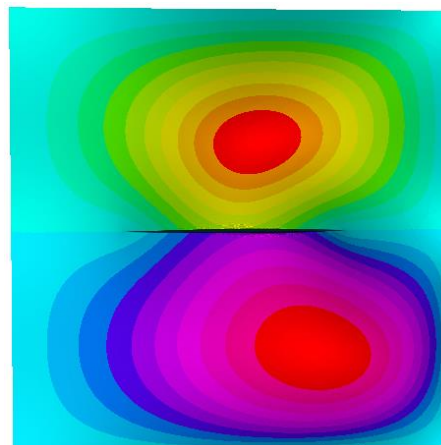
**Hình 3.** Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng, tham số vật liệu và chiều dài vết nứt tới tần số dao động.

**Hình 3** thể hiện ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng, tham số vật liệu và chiều dài vết nứt tới tần số dao động của tấm. Có thể nhận thấy rằng, tần số dao động tự nhiên của tấm FGM có lỗ rỗng có một xu hướng giảm rõ rệt khi chiều dài vết nứt tăng. Với tham số vật liệu  $n=0$ , lúc này tấm hoàn toàn bằng gốm thì tần số tự nhiên cơ bản tăng khi  $e$  tăng. Tuy nhiên, xu hướng này đảo ngược đối với tấm FGM khi chỉ số tham số vật liệu  $n$  khác.

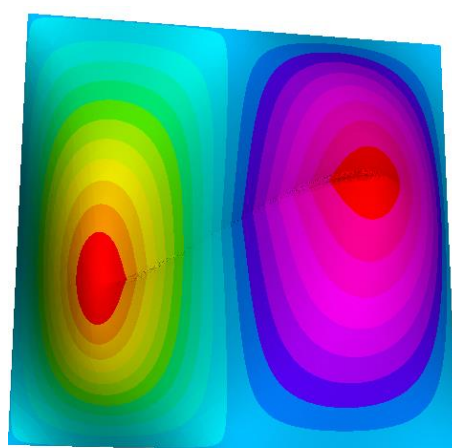
**Hình 4** thể hiện một số dạng dao động của tấm FGM nứt, có lỗ rỗng với các tần số dao động của từng mode. Các tham số của tấm:  $a = b = 0.5m$ ,  $h_o = a/100$ ,  $n = 1$ ,  $e = 0.12$ ,  $h_a / h_o = 0.5$ ,  $c = 0.5a$ ,  $\alpha = 0^0$ . Chúng ta thấy rằng, biên độ lớn nhất của các mode thường lệch hơn về phía tấm có độ dày nhỏ hơn do độ cứng cục bộ tại đó nhỏ hơn.



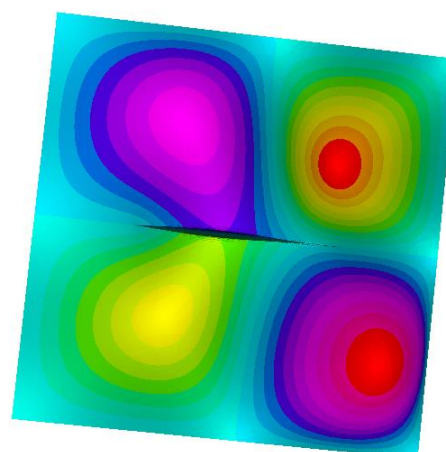
Mode 1:  $\tilde{\omega}_{c1} = 0.91887$



Mode 2:  $\tilde{\omega}_{c2} = 2.18357$



Mode 3:  $\tilde{\omega}_{c3} = 2.4005$



Mode 4:  $\tilde{\omega}_{c4} = 3.37561$

**Hình 4.** Một số dạng dao động của tấm FGM nứt, có lỗ rỗng.

## 5. Kết luận

Trong bài báo này, dao động tự do của tấm chữ nhật FGM có lỗ rỗng đã được nghiên cứu dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao và lý thuyết Phase-field trong cơ học phá hủy. Các tính chất vật liệu của tấm được giả định thay đổi theo chiều dày với quy luật hàm mũ, trong khi chiều dày tấm biến đổi theo quy luật hàm parabol dọc theo một trục. Ảnh hưởng của tham số rỗng, chỉ số hàm mũ, chiều dài và góc nghiêng vết nứt, sự thay đổi tham số độ dày parabol cũng như điều kiện biên khác nhau tới tần số dao động tự nhiên của tấm đã được xem xét. Các kết quả cho thấy rằng: Khi chiều dài vết nứt tăng thì tần số dao động tự do của các tấm

giảm nhanh trong khi tăng góc nứt thì tần số có thay đổi ít hơn; chỉ số tỉ lệ thể tích của vật liệu ( $n$ ) tăng làm thành phần kim loại trong tấm tăng dẫn tới tần số dao động tự do của các tấm giảm; hệ số lỗ rỗng tăng làm tần số giảm trong nhiều trường hợp; tuy nhiên, tần số tự nhiên còn thay đổi theo tham số lỗ rỗng liên quan đến giá trị của  $n$ . Ngoài ra, tham số tần số còn phụ thuộc vào điều kiện biên của tấm, tần số tăng dần theo thứ tự điều kiện biên: FFCF, FCFF, CFFF, SSSS, CFCF, CSCS và CCCC. Kết quả này là tiền đề cho các nghiên cứu về sự phát triển vết nứt khi tấm được đặt trong môi trường làm việc khác nhau.

## Đóng góp của các tác giả trong bài báo

**Vũ Nguyên Thành:** Phương pháp, quản lý dữ liệu, phân tích chính thức, điều tra, xác thực, trực quan hóa, tiếp nhận tài trợ, viết – bản thảo gốc. **Phạm Minh Phúc:** Biên soạn dữ liệu, phân tích dữ liệu, điều tra, xác thực, viết – bản thảo gốc, phương pháp, giám sát, tiếp nhận tài trợ, chỉnh sửa bản thảo, phản hồi ý kiến phản biện.

## Tuyên bố không xung đột lợi ích và cam kết bản quyền

Các tác giả tuyên bố về sự không xuất hiện những xung đột tiềm ẩn từ nghiên cứu này, và cam kết bài báo chưa từng được công bố trước đây.

## Chia sẻ dữ liệu theo yêu cầu

Dữ liệu sẽ được cung cấp theo yêu cầu.

## Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2025-CB-013.

---

1<sup>st</sup> Vu Nguyen Thanh. *Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải*

2<sup>nd</sup> Phạm Minh Phúc\*. *Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải*

\*Corresponding author:

phamminhphuc@utc.edu.vn

---

## Tài liệu tham khảo

- [1] P. A. Demirhan, V. Taskin, "Bending and Free Vibration Analysis of Levy-Type Porous Functionally Graded Plate Using State Space Approach," *Composites Part B: Engineering*, vol. 160, pp. 661–676, 2019, doi: [10.1016/j.compositesb.2018.12.020](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.12.020).
- [2] N. Kumar, S. Kattimani, T. Nguyen-Thoi, "Influence of Porosity Distribution on Nonlinear Free Vibration and Transient Responses of Porous Functionally Graded Skew Plates," *Defence Technology*, vol. 17, no. 6, pp. 1918–1935, 2021, doi: [10.1016/j.dt.2021.02.003](https://doi.org/10.1016/j.dt.2021.02.003).
- [3] N. Sharma, P. Tiwari, D. Maiti, D. Maity, "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Plate Using 3-D Degenerated Shell Element," *Composites Part C: Open Access*, vol. 6, Art. No. 100208, 2021, doi: [10.1016/j.jcomc.2021.100208](https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2021.100208).
- [4] T. T. Tran, Q. Pham, T. N. Thoi, "Static and Free Vibration Analyses of Functionally Graded Porous Variable-Thickness Plates Using an Edge-Based Smoothed Finite Element Method," *Defence Technology*, vol. 17, no. 3, pp. 971–986, 2021, doi: [10.1016/j.dt.2020.06.001](https://doi.org/10.1016/j.dt.2020.06.001).
- [5] A. Raza, H. Pathak, M. Talha, "Computational Investigation of Porosity Effect on Free Vibration of Cracked Functionally Graded Plates Using XFEM," *Materials Today: Proceedings*, vol. 61, no. 1, pp. 96–102, 2022, doi: [10.1016/j.matpr.2022.03.654](https://doi.org/10.1016/j.matpr.2022.03.654).
- [6] S. R. Farsani, Z. Saadat, R. Jafari-Talookolaei, R. Tikani, S. Ziaei-Rad, "Free Vibrational Analysis of Variable Thickness Plate Made of Functionally Graded Porous Materials Using Internal Supports in Contact with Bounded Fluid," *Ocean Engineering*, vol. 263, Art. No. 112335, 2022, doi: [10.1016/j.oceaneng.2022.112335](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2022.112335).
- [7] D. Vasara, S. Khare, H. Sharma, R. Kumar, "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Circular and Annular Plates Using Differential Quadrature Method," *Forces in Mechanics*, vol. 9, Art. No. 100126, 2022, doi: [10.1016/j.finmec.2022.100126](https://doi.org/10.1016/j.finmec.2022.100126).
- [8] M. Izadi, M. Abedi, P. S. Valvo, "Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Porous Triangular Plate with Arbitrary Shape and Elastic Boundary Conditions Using an Isogeometric Approach," *Thin-Walled Structures*, vol. 205, Part B, Art. No. 112422, 2024, doi: [10.1016/j.tws.2024.112422](https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112422).
- [9] Y. Zhao, B. Qin, Q. Wang, X. Liang, "A Unified Jacobi-Ritz Approach for Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Rectangular Plate with Arbitrary Boundary Conditions Based on a Higher-Order Shear Deformation Theory," *Thin-Walled Structures*, vol. 173, Art. No. 108930, 2022, doi: [10.1016/j.tws.2022.108930](https://doi.org/10.1016/j.tws.2022.108930).
- [10] V. C. Nguyen, H. Q. Tran, M. T. Tran, "Nonlinear Free Vibration Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Porous Sandwich Plates," *Thin-Walled Structures*, vol. 203, Art. No. 112204, 2024, doi: [10.1016/j.tws.2024.112204](https://doi.org/10.1016/j.tws.2024.112204).
- [11] Y. H. Xiang, C. M. Wang, "Exact Buckling and Vibration Solutions for Stepped Rectangular Plates," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 250, no. 3, pp. 503–517, 2002, doi: [10.1006/jsvi.2001.3922](https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3922).
- [12] K. Akiyama, M. Kuroda, "Fundamental Frequencies of Rectangular Plates with Linearly

- Varying Thickness,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 205, no. 3, pp. 380–384, 1997, doi: [10.1006/jsvi.1997.1058](https://doi.org/10.1006/jsvi.1997.1058).
- [13] I. Shufrin, M. Eisenberger, “Vibration of Shear Deformable Plates with Variable Thickness — First-Order and Higher-Order Analyses,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 290, no. 1–2, pp. 465–489, 2006, doi: [10.1016/j.jsv.2005.04.003](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.04.003).
- [14] M. Saeidifar, S. N. Sadeghi, M. R. Saviz, “Analytical Solution for the Buckling of Rectangular Plates Under Uni-Axial Compression with Variable Thickness and Elasticity Modulus in the Y-Direction,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, vol. 224, no. 1, pp. 33–41, 2010, doi: [10.1243/09544062JMES1562](https://doi.org/10.1243/09544062JMES1562).
- [15] H. T. Thai, S.-E. Kim, “Levy-Type Solution for Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Based on Two Variable Refined Plate Theory,” *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, no. 8, pp. 3870–3882, 2012, doi: [10.1016/j.apm.2011.11.003](https://doi.org/10.1016/j.apm.2011.11.003).
- [16] V. A. Le, X. T. Nguyen, “The Effect of Cracks on the Free Vibration of a Plate with Parabolic Thickness,” *Engineering, Technology & Applied Science Research*, vol. 13, no. 4, pp. 11100–11105, 2023, doi: [10.48084/etasr.5923](https://doi.org/10.48084/etasr.5923).
- [17] P. M. Phuc, N. V. Duc, “The Effect of Cracks on the Stability of the Functionally Graded Plates with Variable-Thickness Using HSDT and Phase-Field Theory,” *Composites Part B: Engineering*, vol. 175, Art. No. 107086, 2019, doi: [10.1016/j.compositesb.2019.107086](https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2019.107086).
- [18] P. M. Phuc, N. D. Duc, “The Effect of Cracks and Thermal Environment on Free Vibration of FGM Plates,” *Thin-Walled Structures*, vol. 159, Art. No. 107291, 2021, doi: [10.1016/j.tws.2020.107291](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107291).
- [19] P. M. Phuc, D. T. Manh, N. D. Duc, “Free Vibration of Cracked FGM Plates with Variable Thickness Resting on Elastic Foundations,” *Thin-Walled Structures*, vol. 161, Art. No. 107425, 2021, doi: [10.1016/j.tws.2020.107425](https://doi.org/10.1016/j.tws.2020.107425).
- [20] N. D. Duc, P. M. Phuc, “Free Vibration Analysis of Cracked FG CNTRC Plates Using Phase Field Theory,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 112, Art. No. 106654, 2021, doi: [10.1016/j.ast.2021.106654](https://doi.org/10.1016/j.ast.2021.106654).
- [21] P. M. Phuc, “Anaysys Free Vibration of the Functionally Graded Material Cracked Plates with Varying Thickness Using the Phase-Field Theory,” *Transport and Communications Science Journal*, vol. 70, no. 2, pp. 122–131, 2019, doi: [10.25073/tcsj.70.2.35](https://doi.org/10.25073/tcsj.70.2.35).
- [22] P. M. Phuc, “Using Phase Field and Third-Order Shear Deformation Theory to Study the Effect of Cracks on Free Vibration of Rectangular Plates with Varying Thickness,” *Transport and Communications Science Journal*, vol. 71, no. 7, pp. 853–867, 2020, doi: [10.47869/tcsj.71.7.10](https://doi.org/10.47869/tcsj.71.7.10).
- [23] A. S. Rezaei, A. R. Saidi, M. Abrishamdari, M. H. Pour Mohammadi, “Natural Frequencies of Functionally Graded Plates with Porosities via a Simple Four Variable Plate Theory: An Analytical Approach,” *Thin-Walled Structures*, vol. 120, pp. 366–377, 2017, doi: [10.1016/j.tws.2017.08.003](https://doi.org/10.1016/j.tws.2017.08.003).