



# Ảnh hưởng của độ dày theo hai chiều và lỗ rỗng tới dao động tự do của tấm FG có vết nứt trên nền đàn hồi

## Effect of bidirectional thickness and porosity on the free vibration of cracked FG plates on elastic foundations

Nguyễn Thị Kim Khuê, Phạm Minh Phúc\*

Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải

*Từ khóa:*

**TÓM TẮT**

Nền đàn hồi  
Dao động tự do  
Lỗ rỗng  
Tấm FG nứt  
Chiều dày thay đổi

Bài báo trình bày nghiên cứu đặc trưng dao động tự do của tấm chữ nhật đặt trên nền đàn hồi, trong đó tấm được làm từ vật liệu cơ tính biến thiên (FG) với quy luật biến thiên theo hàm mũ và chiều dày thay đổi theo hai phương không gian. Mô hình cơ học được xây dựng dựa trên lý thuyết tấm Mindlin kết hợp phương pháp phần tử hữu hạn, trong khi lý thuyết phase-field được sử dụng để mô phỏng tình trạng của vết nứt tại vùng trung tâm tấm. Độ tin cậy của mô hình được kiểm chứng thông qua so sánh với các kết quả đã công bố. Nghiên cứu khảo sát ảnh hưởng của tỷ phần vật liệu, hệ số lỗ rỗng, chiều dài và góc nghiêng vết nứt, mức độ thay đổi chiều dày và độ cứng nền đàn hồi đến tần số và dạng dao động riêng. Kết quả cho thấy nền đàn hồi, hệ số lỗ rỗng, tham số độ dày và chiều dài vết nứt là các yếu tố chi phối đáng kể đáp ứng dao động, trong khi góc nghiêng vết nứt có ảnh hưởng hạn chế hơn.

*Keywords:*

**ABSTRACT**

Elastic foundation  
Free vibration  
Voids  
Cracked FG plate  
Variable thickness

This paper investigates the free vibration behavior of a rectangular plate resting on an elastic foundation. The plate is made of a functionally graded (FG) material with an exponential variation of properties, and its thickness varies along two in-plane directions. The mechanical model is formulated using the Mindlin plate theory and the finite element method, while the phase-field approach is employed to describe the crack state at the plate center. Model reliability is validated through comparison with published results. The effects of material volume fraction, porosity coefficient, crack length and inclination, thickness variation parameters, and foundation stiffness on the natural frequencies and mode shapes are examined. The results show that the elastic foundation, porosity, thickness variation, and crack length strongly affect the vibration response, whereas the crack inclination angle has a relatively minor influence.

\* Phạm Minh Phúc. Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải

Email: [phamminhphuc@utc.edu.vn](mailto:phamminhphuc@utc.edu.vn)

<https://www.doi.org/10.55228/JTST150302>

Ngày nhận bài: 01/01/2026; Ngày nhận bài sửa: 08/02/2026; Ngày chấp nhận đăng: 10/04/2026

Ngày xuất bản trực tuyến: 15/05/2026

pISSN: 1859-4263; eISSN: 3030-4261

## 1. Giới thiệu

Các kết cấu dạng tấm được ứng dụng rộng rãi trong các lĩnh vực kỹ thuật như hàng không - vũ trụ, cơ khí, xây dựng, giao thông, tàu thủy và kỹ thuật hàng hải, nhờ ưu điểm về khối lượng nhẹ, khả năng chịu tải cao và hiệu quả sử dụng vật liệu. Trong bối cảnh yêu cầu tối ưu hóa độ cứng và độ bền ngày càng cao, các cấu kiện tấm có chiều dày thay đổi theo không gian đã được quan tâm nghiên cứu và ứng dụng nhằm cải thiện phân bố độ cứng, nâng cao hiệu năng làm việc và giảm khối lượng kết cấu. Nhiều công trình công bố đã phân tích đặc trưng dao động và ổn định của tấm biến thiên chiều dày dựa trên các mô hình giải tích và số, chỉ ra rằng sự thay đổi chiều dày tác động rõ rệt đến tần số dao động riêng, dạng dao động và độ cứng toàn cục của kết cấu [1], [2], [3], [4]. Các kết quả này khẳng định vai trò của việc xét đến biến thiên hình học trong thiết kế tấm kỹ thuật, mặc dù phần lớn các nghiên cứu vẫn chủ yếu tập trung vào tấm đồng nhất hoặc tấm FG không xét đến khuyết tật vật liệu.

Song song với phát triển hình học kết cấu, vật liệu cơ tính biến thiên (FGM) được sử dụng ngày càng phổ biến nhờ khả năng phân bố liên tục tính chất cơ - nhiệt theo chiều dày. Trong quá trình chế tạo FGM bằng các công nghệ hiện đại, lỗ rỗng vi mô có thể phát sinh và trở thành yếu tố ảnh hưởng đáng kể đến cơ tính của vật liệu. Do đó, nhiều nghiên cứu đã tập trung đánh giá ảnh hưởng của phân bố lỗ rỗng đến ứng xử dao động và độ bền của tấm FG thông qua các mô hình lỗ rỗng đều và không đều theo chiều dày [5], [6], [7], [8]. Các kết quả cho thấy sự tồn tại của lỗ rỗng dẫn đến suy giảm độ cứng hiệu dụng và tần số dao động riêng, đồng thời gia tăng biến dạng và xu hướng tập trung ứng suất. Nhận định này đặc biệt có ý nghĩa đối với các kết cấu mỏng chịu tác động dao động, nơi mà sự kết hợp giữa biến thiên vật liệu và lỗ rỗng có thể làm tăng mức độ nhạy cảm của kết cấu đối với tải trọng động.

Trong điều kiện làm việc thực tế, kết cấu tấm còn có thể xuất hiện vết nứt do mỏi, tải trọng lặp hoặc va đập, gây thay đổi đáng kể trạng thái ứng suất - biến dạng và đặc trưng dao động của hệ kết cấu. Do đó, dao động của tấm có vết nứt đã được nghiên cứu rộng rãi dưới nhiều dạng mô hình khác nhau, bao gồm vết nứt bề mặt, vết nứt xuyên suốt và vết nứt bên trong, kết hợp với các phương pháp mô hình hóa như lò xo

tuyến tính, phương pháp Ritz, FEM và các mô hình phi tuyến [9], [10], [11], [12]. Các kết quả công bố chỉ ra rằng chiều dài, vị trí và hướng nứt có ảnh hưởng đáng kể đến độ cứng cục bộ, tần số dao động và dạng dao động riêng. Tuy nhiên, phần lớn các công trình hiện có mới chỉ xét đến tấm đồng nhất hoặc tấm FG không chứa lỗ rỗng và chưa xem xét đầy đủ ảnh hưởng kết hợp của khuyết tật vật liệu và hình học.

Mặt khác, trong nhiều ứng dụng kỹ thuật, tấm không làm việc trong môi trường tự do mà thường tựa trên nền đàn hồi như nền đất, lớp vật liệu hỗ trợ hoặc kết cấu đỡ mềm. Do đó, các mô hình nền đàn hồi kiểu Winkler và Pasternak thường được sử dụng nhằm mô phỏng ảnh hưởng của nền đến ứng xử động lực của tấm. Các nghiên cứu đã chứng minh rằng độ cứng nền và điều kiện biên có tác động đáng kể đến tần số và dạng dao động của tấm FG [13], [14], [15], [16]. Khi tấm đồng thời tồn tại biến thiên chiều dày, lỗ rỗng và vết nứt, sự tương tác giữa kết cấu - vật liệu - nền đàn hồi trở nên phức tạp hơn, đòi hỏi các mô hình phân tích tổng quát và bao quát hơn. Tuy nhiên, các nghiên cứu hiện có chủ yếu mới xem xét từng yếu tố riêng rẽ.

Từ các kết quả tổng quan nêu trên có thể nhận thấy rằng đã có nhiều nghiên cứu chuyên sâu về tấm FG có chiều dày biến thiên, tấm FG có lỗ rỗng, tấm có vết nứt, cũng như tấm làm việc trên nền đàn hồi. Tuy nhiên, theo hiểu biết của nhóm tác giả, chưa có công trình nào đồng thời xem xét bài toán dao động tự do của tấm FG có vết nứt, chứa lỗ rỗng, chiều dày biến thiên hai chiều và đặt trên nền đàn hồi. Đây là khoảng trống nghiên cứu đáng kể, có ý nghĩa quan trọng đối với việc đánh giá chính xác ứng xử động lực của kết cấu trong điều kiện làm việc thực tế. Vì vậy, nghiên cứu này được thực hiện nhằm xây dựng mô hình phân tích tổng quát cho bài toán nêu trên và làm rõ ảnh hưởng kết hợp của vết nứt, lỗ rỗng, biến thiên độ dày hai chiều và nền đàn hồi đến đặc trưng dao động của tấm FG.

## 2. Thành lập các phương trình

Tấm FG được cấu tạo từ hai pha vật liệu gồm gốm và kim loại, có kích thước hình học gồm chiều dài ( $a$ ), chiều rộng ( $b$ ) và chiều dày thay đổi theo cả hai phương trong mặt tấm, được mô tả bởi hàm  $h(x,y)$ , trong hệ tọa độ Đề-các Oxyz như minh họa ở Hình 1. Phân bố thể tích vật liệu trong tấm FG được giả thiết

tuân theo quy luật lũy thừa và được biểu diễn bằng công thức (1):

$$V_c = \left( \frac{1}{2} + \frac{z}{h(x, y)} \right)^n; V_m = 1 - V_c \quad (1)$$

trong đó  $n$  là chỉ số lũy thừa ( $n \geq 0$ ), đặc trưng cho mức độ biến thiên tính chất vật liệu theo chiều dày của tấm FG;  $z$  là tọa độ theo chiều dày, được xác định trong miền  $(-h(x, y)/2 \leq z \leq h(x, y)/2)$ .

Khi xét đến sự tồn tại của lỗ rỗng trong vật liệu, các thông số cơ học của tấm FGM được hiệu chỉnh theo biểu thức (2).

$$P(z) = P_m + (P_c - P_m)V_c - \frac{e}{2}(P_c + P_m) \quad (2)$$

Ở đây,  $P_c$  và  $P_m$  tương ứng là mô đun Young, khối lượng riêng và hệ số Poisson của vật liệu của gốm và kim loại;  $e$  là hệ số rỗng đặc trưng cho mức độ rỗng của vật liệu trong tấm..

Trong bài báo này, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất Mindlin [11] được sử dụng; trường chuyển vị của điểm bất kỳ  $M(x, y, z)$  trong tấm được viết dưới dạng (3):

$$\begin{aligned} U_x(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\varphi_x(x, y, t) \\ U_y(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\varphi_y(x, y, t) \\ U_z(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3)$$

Trong đó,  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  lần lượt biểu thị các chuyển vị tại mặt phẳng trung bình của tấm theo các trục  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ;  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  là các góc quay theo trục  $x$  và  $y$ .

Các biến dạng tương ứng với trường chuyển vị trong phương trình (3) được xác định theo biểu thức (4):

$$\begin{cases} \epsilon_x = u_{0,x} + z\varphi_{x,x} \\ \epsilon_y = v_{0,y} + z\varphi_{y,y} \\ \gamma_{xy} = u_{0,y} + v_{0,x} + z(\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x}) \\ \gamma_{yz} = \varphi_y + w_{,y} \\ \gamma_{xz} = \varphi_x + w_{,x} \end{cases} \quad (4)$$

Dựa trên giả thiết đàn hồi tuyến tính của mô hình tấm Mindlin, quan hệ giữa ứng suất pháp, ứng suất cắt và các thành phần biến dạng của tấm FG được thể hiện như sau:

$$\begin{cases} \sigma(z) = Q(z)\epsilon^{(0)} + zQ(z)\epsilon^{(1)} \\ \tau(z) = Q_s(z)\gamma^{(0)} \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó:

$$\sigma(z) = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T; \quad \tau(z) = [\tau_{yz} \quad \tau_{xz}]^T$$

$$Q(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2(z)} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix}$$

$$Q_s(z) = \frac{5E(z)}{12[1+\nu(z)]} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cần nhấn mạnh rằng các thành phần biến dạng màng và uốn trong phương trình (5) được suy ra trực tiếp từ trường chuyển vị của tấm đã xác định trong phương trình (4) [11].

Dựa trên quan hệ ứng suất–biến dạng đã thiết lập, các lực pháp tuyến, mô men uốn và lực cắt của tấm được tính toán và trình bày dưới dạng các biểu thức sau.

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^{(0)} \\ \epsilon^{(1)} \end{Bmatrix}; \{Q\} = D_s \gamma^{(0)} \quad (6)$$

Trong đó:

$$(A, B, D) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) Q(z) dz,$$

$$D_s = \int_{-h/2}^{h/2} Q_s(z) dz$$

Trên cơ sở lý thuyết đàn hồi, năng lượng biến dạng của tấm FGM được mô tả bằng biểu thức trong phương trình (7).

$$W(d) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \begin{pmatrix} \epsilon^{(0)T} A \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(0)T} B \epsilon^{(1)} \\ + \epsilon^{(1)T} B \epsilon^{(0)} + \epsilon^{(1)T} D \epsilon^{(1)} \\ + \gamma^{(0)T} D_s \gamma^{(0)} \end{pmatrix} d\Omega \quad (7)$$

### 3. Lý thuyết Phase-field mô phỏng trạng thái vật liệu

Trong lý thuyết Phase-Field của cơ học phá hủy [11], trạng thái vật liệu được mô tả thông qua biến

Phase-Field  $s$ , trong đó  $s=0$  tương ứng với vùng vật liệu chưa xuất hiện vết nứt, còn  $s=1$  đặc trưng cho vật liệu đã mất hoàn toàn khả năng chịu tải. Khi  $s$  nhận giá trị trong khoảng từ 0 đến 1, vật liệu được xem như nằm trong trạng thái suy giảm độ cứng, phản ánh quá trình chuyển tiếp liên tục giữa vật liệu nguyên vẹn và vật liệu bị nứt. Do đó,  $s$  có thể được hiểu như một tham số trường mô tả sự phát triển của vết nứt trong mô hình đàn hồi phá hủy.

Biến  $s$  được xem là một biến bổ sung trong công thức năng lượng của hệ kết cấu; khi mức năng lượng biến dạng đạt giá trị tới hạn và suy giảm, quá trình hình thành và mở rộng vết nứt trong tấm sẽ xảy ra một cách tự nhiên trong khuôn khổ mô hình Phase-Field.

Khi tấm bị nứt, tổng năng lượng biến dạng của tấm do lực pháp tuyến, mô men uốn và lực cắt có thể được viết dưới dạng (8):

$$W(\mathbf{d}, s) = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} s^2 \left( \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)T} \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\gamma}^{(0)T} \mathbf{D}_s \boldsymbol{\gamma}^{(0)} \right) d\Omega \right. \\ \left. + \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4\ell_0} + \ell_0 |\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\} \quad (8) \\ = \left\{ \int_{\Omega} s^2 \Pi(\mathbf{d}) d\Omega + \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4\ell_0} + \ell_0 |\nabla s|^2 \right] d\Omega \right\}$$

Trong đó,  $\mathbf{d}$  được sử dụng để biểu thị vector chuyển vị,  $G_c$  là tốc độ giải phóng năng lượng tới hạn trong lý thuyết của Griffith [11], và  $\ell_0$  là chiều rộng vết nứt.

Động năng của tấm được biểu diễn dưới dạng (9)

$$\text{với chú ý } I_i = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) z^i dz ; \quad i = 0, 1, 2$$

$$T(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_V s^2 \rho(z) (\dot{U}_x^2 + \dot{U}_y^2 + \dot{U}_z^2) dV \quad (9)$$

Kết hợp (3) để tính các vận tốc, sẽ tính được công thức (10)

$$T(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s^2 \left\{ (\dot{u}_0^2 + \dot{v}_0^2 + \dot{w}^2) I_0 + 2(\dot{u}_0 \dot{\phi}_x + \dot{v}_0 \dot{\phi}_y) I_1 + (\dot{\phi}_x^2 + \dot{\phi}_y^2) I_2 \right\} d\Omega \quad (10)$$

Trong khuôn khổ mô hình nền đàn hồi kiểu Pasternak, phần năng lượng biến dạng do nền đóng góp được mô tả bằng biểu thức sau.

$$W_{dh}(\mathbf{d}, s) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} s^2 \left\{ k_w w^2 + k_s \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} d\Omega \quad (11)$$

trong đó,  $k_w$  biểu thị độ cứng thẳng đứng của nền Winkler, còn  $k_s$  là độ cứng cắt của nền Pasternak.

Trên cơ sở các biểu thức đã thiết lập ở trên, hàm Lagrangian của tấm FG được xác định và biểu diễn như sau:

$$L(\mathbf{d}, s) = T(\mathbf{d}, s) - (W(\mathbf{d}, s) + W_{dh}(\mathbf{d}, s)) \\ \Rightarrow L(\mathbf{d}, s) = \int_{\Omega} s^2 \Upsilon(\mathbf{d}) d\Omega - \\ - \int_{\Omega} G_c h \left[ \frac{(1-s)^2}{4\ell_0} + \ell_0 |\nabla s|^2 \right] d\Omega \quad (12)$$

Biến phân bậc nhất của hàm khả vi Lagrange được xác định dưới dạng:

$$\begin{cases} \delta L(\mathbf{d}, s, \delta \mathbf{d}) = 0 \\ \delta L(\mathbf{d}, s, \delta s) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

Theo đó, các giá trị riêng và dạng riêng của hệ được xác định thông qua phương trình sau:

$$\begin{cases} (\sum \mathbf{K}^e + \omega^2 \sum \mathbf{M}^e) \mathbf{d} = 0 \\ \int_{\Omega} 2s \Upsilon(\mathbf{d}) \delta s d\Omega - \\ - \int_{\Omega} 2G_c h \left[ \frac{(s-1)\delta s}{4\ell_0} + \ell_0 \nabla s \nabla(\delta s) \right] d\Omega = 0 \end{cases} \quad (14) \quad (15)$$

#### 4. Kết quả số và thảo luận

Dựa trên các biểu thức đã trình bày trong Mục 3, hình dạng vết nứt được mô tả thông qua hàm  $\Upsilon(\mathbf{d})$  theo tài liệu [11] như sau:

$$\Upsilon(\mathbf{d}) = 10^3 \frac{G_c}{4\ell_0} \cdot P_0(x, y) \quad (16)$$

ở đây:

$$P_0(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \leq L_c \text{ and } -\frac{\ell_0}{2} \leq y \leq \frac{\ell_0}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (17)$$

Với  $L_c$  là chiều dài vết nứt;  $\ell_0$  dùng để kiểm soát độ rộng của vùng nứt [11].

Trước hết, hình dạng vết nứt được xác định từ phương trình (16). Trên cơ sở đó, biến Phase-Field ( $s$ ) được suy ra bằng phương trình (15) và được thay thế vào phương trình (14). Khi đó, bài toán trị riêng

được giải để thu được  $\omega$ , đại diện cho tần số dao động riêng của tấm cùng với dạng dao động tương ứng.

##### 4.1. Dao động tự do của tấm đồng nhất với chiều dày thay đổi theo hai chiều.

Trong phần này, dao động tự do của tấm có vết nứt với chiều dày thay đổi theo hàm parabol được phân tích và so sánh với nghiên cứu của Huang và cộng sự [1]; B. Singh và V. Saxena [17]. Tấm được làm từ nhôm (Al), với mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson tương ứng là:  $E = 70GPa$ ;

$$\rho = 2707kg / m^3; \quad \nu = 0.3.$$

Tham số tần số dao động tự do của tấm được tính theo công thức [1]:

$$\hat{\omega} = a \left( \frac{\rho h_0 \omega^2}{D_0 (1 - \nu^2)} \right)^{1/4} \quad (18)$$

$$\text{với } D_0 = Eh_0^3 / (12(1 - \nu^2)). \quad (19)$$

Chiều dày của tấm thay đổi theo trục  $x$  và  $y$  theo quy luật (Hình 1):  $h(x, y) = h_0 (1 + \beta_x \cdot x / a) (1 + \beta_y \cdot y / b)$  với  $\beta_x = h_a / h_0 - 1$ ,  $\beta_y = h_b / h_0 - 1$ . Tấm vuông có kích thước cạnh:  $a = b = 0.5m$ ; chiều dày  $h_0 = 0.005m$ . Vết nứt ở giữa tấm, song song với trục  $x$  và có chiều dài là  $c$ .

Bảng 1 thể hiện tham số tần số của tấm với các tỷ số chiều dày khác nhau và điều kiện biên của tấm tựa đơn ở bốn cạnh (SSSS). Có thể thấy rằng sai số giữa kết quả của bài báo này và nghiên cứu của các tài liệu tham khảo [1], [17] là rất nhỏ, cho thấy chương trình tính toán trong nghiên cứu này có độ tin cậy cao.

**Bảng 1.** Tham số tần số dao động tự do của tấm nứt có chiều dày thay đổi theo hai chiều.

| $\beta_x$ | $\beta_y$ | Nguồn     | Mode dao động |         |         |         |         |
|-----------|-----------|-----------|---------------|---------|---------|---------|---------|
|           |           |           | 1st           | 2nd     | 3rd     | 4th     | 5th     |
| 0.5       | -0.5      | Bài báo   | 4.36537       | 6.8068  | 6.87985 | 8.70396 | 9.52737 |
|           |           | Ref. [1]  | 4.365         | 6.806   | 6.88    | 8.705   | 9.52    |
|           |           | Ref. [17] | 4.365         | 6.81    | 6.882   | -       | -       |
|           | 0.5       | Bài báo   | 5.6577        | 8.87351 | 8.92713 | 11.2861 | 12.506  |
|           |           | Ref. [1]  | 5.659         | 8.88    | 8.935   | 11.302  | 12.515  |
|           |           | Ref. [17] | 5.659         | 8.885   | 8.938   | -       | -       |

#### 4.2. Dao động tự do của tấm FG nứt, có chiều dày thay đổi theo trục $x$ và tựa trên nền đàn hồi.

Trong phần này, tấm FG có chiều dày thay đổi theo trục  $x$  với quy luật  $h(x) = h_0(1 + \beta_x \cdot x / a)$ , vết nứt ở tâm, tựa trên nền Parternak và điều kiện biên tựa đơn trên bốn cạnh (SSSS). Các thuộc tính vật liệu FGM ( $Al, Al_2O_3$ ): mô đun đàn hồi  $E_m = 70 GPa$ ,  $E_c = 380 GPa$ ; khối lượng riêng  $\rho_m = 2707 kg / m^3$ ,  $\rho_c = 3800 kg / m^3$ ; hệ số Poisson  $\nu_m = \nu_c = 0.3$ .

Ở đây, các công thức tính tham số nền không kích thước và tham số tần số của tấm được tính theo công thức:

$$\tilde{\omega} = \omega b^2 / h_0 \sqrt{\rho_c / E_c} \quad (20)$$

$$K_s = k_s b^2 / D_m; K_w = k_w b^4 / D_m \quad (21)$$

với  $D_m = E_m h_0^3 / (12(1 - \nu_m^2))$

**Bảng 2.** Tham số tần số dao động tự do của tấm FG có vết nứt trên nền đàn hồi.

| $n$ | Nguồn   | Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ ) |         |         |         |         |
|-----|---------|-----------------------------------|---------|---------|---------|---------|
|     |         | 0                                 | 0.2     | 0.4     | 0.6     | 0.8     |
| 0   | Duc [9] | 5.73884                           | 5.62235 | 5.38394 | 5.15007 | 4.99705 |
|     | Bài báo | 5.73899                           | 5.62343 | 5.39013 | 5.16268 | 5.01455 |
| 0.2 | Duc [9] | 5.44479                           | 5.33936 | 5.12379 | 4.9131  | 4.77562 |
|     | Bài báo | 5.44499                           | 5.34063 | 5.12983 | 4.92495 | 4.79171 |
| 1   | Duc [9] | 4.76848                           | 4.68974 | 4.52942 | 4.37471 | 4.27461 |
|     | Bài báo | 4.76807                           | 4.69096 | 4.53476 | 4.38445 | 4.28708 |
| 5   | Duc [9] | 4.41398                           | 4.35273 | 4.22965 | 4.11304 | 4.03848 |
|     | Bài báo | 4.41104                           | 4.35225 | 4.2333  | 4.12034 | 4.04749 |

Bảng 2 được tính với số liệu  $a = b = 0.5m$ ;  $h_0 = b/50$ ;  $\beta_x = -0.25$ ;  $(K_w, K_s) = (100, 10)$ ; điều kiện biên SSSS. Trong bài báo của Duc và cộng sự [9] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, ở nghiên cứu này nhóm tác giả sử dụng lý thuyết Mindlin. Tuy nhiên, sai khác là khá nhỏ.

#### 4.3. Dao động tự do của tấm FG có lỗ rỗng

Trong phần này, tấm FG ( $Al, Al_2O_3$ ) có lỗ rỗng phân bố đều được nghiên cứu. Tấm có chiều dày không đổi với mô đun đàn hồi, khối lượng riêng, hệ số poisson giống mục 4.2.

Tham số tần số dao động tự do của tấm được tính theo công thức (22):

$$\tilde{\omega}_m = \omega h \sqrt{\rho_m / E_m} \quad (22)$$

Ở các Bảng 3, được xét với tấm vuông có  $a = b = 0.5m$ , liên kết đơn ở bốn cạnh (SSSS) và chiều dày tấm  $h = a / 20$ .

**Bảng 3.** Tham số tần số của tấm FG phụ thuộc lỗ rỗng và thành phần vật liệu.

| $n$ | Nguồn      | Hệ số lỗ rỗng ( $e$ ) |           |           |
|-----|------------|-----------------------|-----------|-----------|
|     |            | 0                     | 0.2       | 0.4       |
| 0   | Thành [10] | 0.0291138             | 0.0296226 | 0.0308483 |
|     | Bài báo    | 0.0291241             | 0.0296341 | 0.0308527 |
| 0.5 | Thành [10] | 0.0246657             | 0.0243016 | 0.0238489 |
|     | Bài báo    | 0.0247857             | 0.0243016 | 0.0238672 |
| 1   | Thành [10] | 0.02223               | 0.02083   | 0.017897  |
|     | Bài báo    | 0.0223402             | 0.0208537 | 0.0178998 |

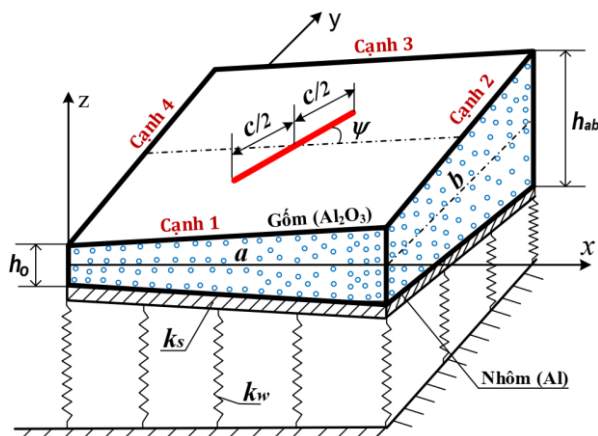
Trong khi bài báo của Thành [10] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, nghiên cứu này áp dụng mô hình tấm Mindlin. Mặc dù khác biệt về cơ sở lý thuyết, sự sai khác giữa hai mô hình trong phạm vi khảo sát là không đáng kể.

#### 4.4. Dao động tự do của tấm FG nứt có lỗ rỗng, với chiều dày thay đổi hai chiều, tựa trên nền đàn hồi

Trong mục này, tấm FG ( $Al, Al_2O_3$ ) có lỗ rỗng phân bố đều được xem xét. Tấm có chiều dày biến thiên theo hai trục, với quy luật thay đổi như trong Mục 4.1 ( $h(x, y) = h_0(1 + \beta_x \cdot x / a)(1 + \beta_y \cdot y / b)$ ), trong khi

các đặc trưng vật liệu gồm mô đun đàn hồi, khối lượng riêng và hệ số Poisson được giữ giống Mục 4. Sau khi tiến hành các phép kiểm chứng và so sánh kết quả tại các Mục 4.1, 4.2 và 4.3, sự sai khác thu được là rất nhỏ. Trên cơ sở đó, nhóm nghiên cứu đã phát triển chương trình tính toán riêng để thực hiện các phân tích trong mục này.

Tham số tần số và tham số nền đàn hồi được tính tương ứng theo công thức (20), (21).



Hình 1. Dạng hình học tấm FG trên nền đàn hồi.

Bảng 4. Tham số tần số của tấm FG có lỗ rỗng phụ thuộc vào tham số nền đàn hồi.

| $K_w$ | $K_s$ | Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ ) |         |         |         |
|-------|-------|-----------------------------------|---------|---------|---------|
|       |       | 0                                 | 0.3     | 0.5     | 0.7     |
| 0     | 0     | 5.49713                           | 5.26105 | 4.99068 | 4.76391 |
|       | 0     | 5.58042                           | 5.34795 | 5.08217 | 4.85969 |
| 50    | 5     | 5.74237                           | 5.52147 | 5.27006 | 5.06106 |
|       | 10    | 5.89978                           | 5.68958 | 5.45119 | 5.25418 |
| 100   | 0     | 5.66249                           | 5.43345 | 5.17203 | 4.95362 |
|       | 5     | 5.82213                           | 5.60431 | 5.35675 | 5.1513  |
| 300   | 10    | 5.97742                           | 5.76999 | 5.53503 | 5.34114 |
|       | 10    | 6.27834                           | 6.08097 | 5.85837 | 5.67561 |
| 1000  | 30    | 6.83613                           | 6.67081 | 6.48506 | 6.33459 |
|       | 50    | 7.35076                           | 7.21125 | 7.05347 | 6.92626 |
| 150   | 50    | 8.18013                           | 8.0546  | 7.9134  | 7.80029 |
|       | 100   | 9.22492                           | 9.14048 | 9.03913 | 8.95633 |
| 150   | 10    | 10.1607                           | 10.107  | 10.0323 | 9.968   |

Bảng 4 trình bày tần số dao động riêng bậc nhất của tấm FG nứt có lỗ rỗng, chiều dày thay đổi theo hai phương và được tựa trên nền đàn hồi kiểu Winkler–Pasternak. Các tham số hình học và vật liệu được chọn như sau: tấm vuông  $a=b$ , điều kiện biên SSSS, góc nghiêng vết nứt  $\psi=0$ , hệ số phân bố vật liệu  $n=1$ , hệ số lỗ rỗng  $e=0.15$ , và tỉ lệ chiều dày  $h_a/h_0=1.3$ ,

$h_b/h_0=1.2$ . Ảnh hưởng của nền đàn hồi được xét thông qua hai hệ số độ cứng  $K_w$  (Winkler) và  $K_s$  (Pasternak), trong khi mức độ phát triển vết nứt được đặc trưng bởi tỉ lệ chiều dài vết nứt  $c/a$ .

Kết quả cho thấy tần số riêng giảm đáng kể khi chiều dài vết nứt tăng, phản ánh sự suy giảm độ cứng tổng thể của tấm do mất ổn định cục bộ tại vùng nứt. Ngược lại, khi độ cứng nền  $K_w$  và  $K_s$  tăng, tần số dao động tăng rõ rệt, chứng tỏ nền đàn hồi đóng vai trò tăng cường khả năng chịu tải uốn và hạn chế độ võng động. Đồng thời, mức gia tăng tần số mạnh hơn ở các trường hợp nền cứng, cho thấy tương tác nền–tấm có ảnh hưởng chi phối khi tấm tồn tại vết nứt.

Bảng 5. Ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày và chiều dài vết nứt đến tham số tần số dao động.

| $h_a/h_0$ | $h_b/h_0$ | Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ ) |         |         |         |
|-----------|-----------|-----------------------------------|---------|---------|---------|
|           |           | 0                                 | 0.3     | 0.5     | 0.7     |
| 1         | 1         | 4.44243                           | 4.27881 | 4.09576 | 3.94662 |
|           | 1.2       | 4.79401                           | 4.61029 | 4.40359 | 4.23365 |
|           | 1.4       | 5.15465                           | 4.9563  | 4.72987 | 4.53986 |
|           | 1.6       | 5.52067                           | 5.3121  | 5.06909 | 4.85906 |
| 1.2       | 1         | 4.79401                           | 4.60868 | 4.40107 | 4.23146 |
|           | 1.2       | 5.19021                           | 4.98385 | 4.75139 | 4.5597  |
|           | 1.4       | 5.59304                           | 5.37165 | 5.11859 | 4.90528 |
|           | 1.6       | 5.99947                           | 5.7678  | 5.49745 | 5.26227 |
| 1.4       | 1         | 5.15465                           | 4.95016 | 4.7203  | 4.53187 |
|           | 1.2       | 5.59304                           | 5.36673 | 5.11093 | 4.89918 |
|           | 1.4       | 6.03612                           | 5.79447 | 5.51723 | 5.28227 |
|           | 1.6       | 6.48135                           | 6.22941 | 5.93418 | 5.67541 |
| 1.6       | 1         | 5.52067                           | 5.29907 | 5.0488  | 4.84285 |
|           | 1.2       | 5.99947                           | 5.75533 | 5.4781  | 5.2476  |
|           | 1.4       | 6.48135                           | 6.22161 | 5.92211 | 5.66675 |
|           | 1.6       | 6.9642                            | 6.69419 | 6.37597 | 6.09479 |

Bảng 5 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dày và chiều dài vết nứt đến tần số dao động riêng của tấm FG nứt có lỗ rỗng, với chiều dày biến thiên theo hai phương và tựa trên nền đàn hồi  $(K_w, K_s)=(30, 5)$ . Tấm được xét trong điều kiện biên SSSS, hình dạng vuông  $a=b$ , góc nghiêng vết nứt  $\psi=0$ , hệ số vật liệu  $n=1.5$ , hệ số lỗ rỗng  $e=0.1$ , và tỉ lệ kích thước  $b/h_0=100$ . Tỉ lệ chiều dày tại hai biên được đặc trưng bởi  $h_a/h_0$  và  $h_b/h_0$ , trong khi mức độ phát triển vết nứt được mô tả bằng  $c/a$ .

Kết quả cho thấy tần số dao động giảm dần theo sự gia tăng của chiều dài vết nứt, do độ cứng tổng thể của tấm suy giảm khi vùng nứt mở rộng. Ngược lại,

khi tỉ lệ chiều dày tăng, tần số tăng rõ rệt, phản ánh sự gia tăng độ cứng uốn nhờ cấu trúc dày hơn tại các biên. Ngoài ra, sự kết hợp giữa chiều dày lớn và vết nứt ngắn tạo ra mức tần số cao nhất, chứng tỏ tương quan cạnh tranh giữa yếu tố hình học và yếu tố suy yếu vật liệu trong đáp ứng dao động.

**Bảng 6.** Ảnh hưởng của tỉ lệ cạnh và hệ số lỗ rỗng đến tham số tần số dao động.

| Tỉ lệ cạnh<br>(a/b) | Hệ số lỗ rỗng (e) |         |         |         |         |
|---------------------|-------------------|---------|---------|---------|---------|
|                     | 0                 | 0.1     | 0.2     | 0.3     | 0.4     |
| 0.5                 | 14.9985           | 14.7947 | 14.5529 | 14.2406 | 13.7958 |
| 1                   | 5.8358            | 5.79262 | 5.73814 | 5.66213 | 5.54497 |
| 1.5                 | 3.99083           | 3.98215 | 3.96862 | 3.94494 | 3.90073 |
| 2                   | 3.25871           | 3.26535 | 3.27015 | 3.26997 | 3.2584  |

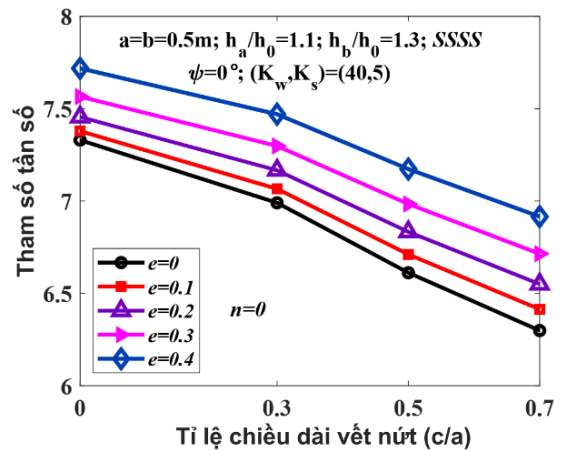
Bảng 6 trình bày ảnh hưởng của tỉ lệ cạnh  $a/b$  và hệ số lỗ rỗng  $e$  đến tần số dao động riêng của tấm FG nứt, có chiều dày biến thiên theo hai phương và tựa trên nền đàn hồi với  $(K_w, K_s) = (50, 5)$ . Các tham số hình học và vật liệu được lựa chọn như sau: điều kiện biên SSSS, góc nghiêng vết nứt  $\psi = 0$ , tỉ lệ chiều dày  $h_a/h_o = 1.1$ ,  $h_b/h_o = 1.4$ , hệ số phân bố vật liệu  $n = 0.7$ , tỉ lệ kích thước  $b/h_o = 100$ , và chiều dài vết nứt  $c/a = 0.4$ . Tỉ lệ cạnh  $a/b$  phản ánh sự thay đổi hình dạng tấm từ dạng hẹp đến dạng thon dài, trong khi hệ số lỗ rỗng  $e$  mô tả mức độ suy giảm vật liệu do phân bố lỗ rỗng. Kết quả cho thấy tần số dao động giảm mạnh khi tỉ lệ cạnh tăng, chứng tỏ các tấm có dạng thon dài có độ cứng uốn thấp hơn và do đó nhạy cảm hơn với biến dạng động. Đồng thời, khi hệ số lỗ rỗng tăng, tần số giảm dần ở mọi trường hợp  $a/b$ , phản ánh vai trò suy yếu cơ học do giảm thể tích vật liệu hữu hiệu. Điều này cho thấy hai yếu tố hình học và vị cấu trúc cùng làm suy giảm độ cứng tổng thể của hệ kết cấu.

**Hình 2** minh họa ảnh hưởng đồng thời của hệ số lỗ rỗng  $e$ , tham số vật liệu  $n$  và tỉ lệ chiều dài vết nứt  $c/a$  đến tần số dao động riêng của tấm FG có lỗ rỗng. Có thể quan sát thấy rằng, đối với mọi giá trị  $n$ , tần số dao động giảm đơn điệu khi  $c/a$  tăng, phản ánh sự suy giảm độ cứng tổng thể do sự phát triển của vết nứt.

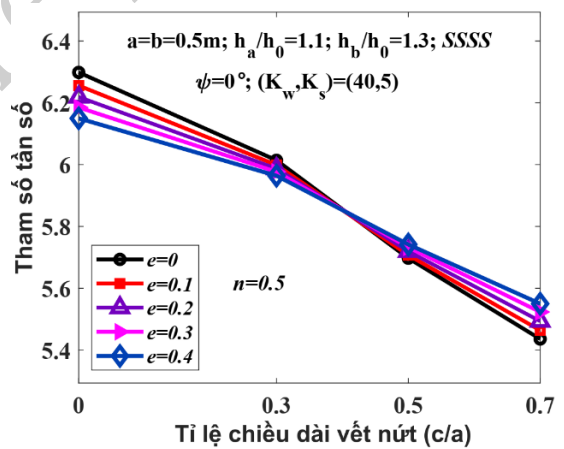
Đối với trường hợp  $n=0$  (tấm thuần gốm), tần số có xu hướng tăng khi hệ số lỗ rỗng tăng, điều này xuất phát từ việc độ cứng vật liệu gốm vốn lớn, nên sự

rỗng hóa làm giảm khối lượng hiệu dụng nhanh hơn so với mức suy giảm độ cứng, dẫn đến tần số tăng nhẹ. Tuy nhiên, khi  $n$  tăng (vật liệu tiến dần về phía kim loại), xu hướng này đảo chiều, tức tần số giảm theo  $e$ . Khi đó, ảnh hưởng suy yếu của lỗ rỗng lên mô đun đàn hồi đóng vai trò chi phối, làm giảm độ cứng tổng thể của tấm.

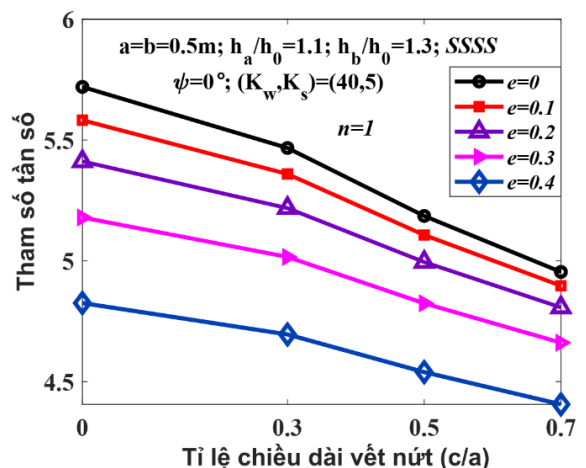
a)



b)

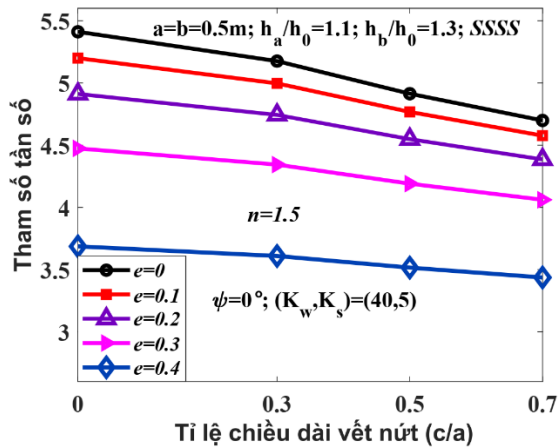


c)





d)



**Hình 2.** Ảnh hưởng của hệ số lỗ rỗng, tham số vật liệu và chiều dài vết nứt tới tần số dao động.

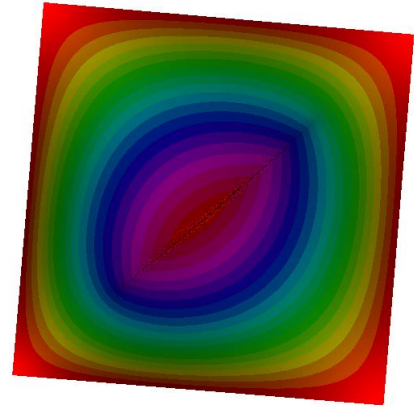
**Bảng 7.** Ảnh hưởng của góc nghiêng vết nứt đến tham số tần số dao động.

| Góc nứt<br>( $\psi$ ) | Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ ) |         |         |         |
|-----------------------|-----------------------------------|---------|---------|---------|
|                       | 0                                 | 0.3     | 0.5     | 0.7     |
| $0^\circ$             | 5.36754                           | 5.18652 | 4.97878 | 4.80412 |
| $15^\circ$            | 5.36754                           | 5.18336 | 4.96666 | 4.77330 |
| $30^\circ$            | 5.36754                           | 5.17804 | 4.94217 | 4.71593 |
| $45^\circ$            | 5.36754                           | 5.17503 | 4.92855 | 4.66935 |
| $60^\circ$            | 5.36754                           | 5.17643 | 4.93932 | 4.70337 |
| $75^\circ$            | 5.36754                           | 5.18795 | 4.98276 | 4.80587 |
| $90^\circ$            | 5.36754                           | 5.18441 | 4.97561 | 4.80179 |

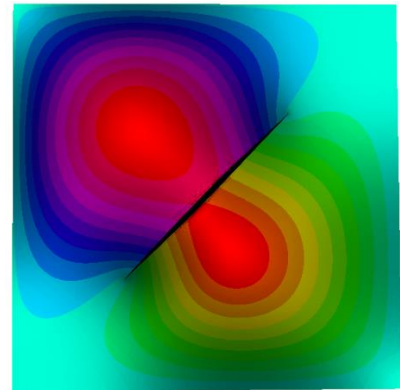
Bảng 7 phân tích ảnh hưởng của góc nghiêng vết nứt  $\psi$  và tỉ lệ chiều dài vết nứt  $c/a$  đến tần số dao động riêng của tấm FG tựa trên nền đàn hồi  $(K_w, K_s)=(80,8)$ . Các điều kiện khảo sát được chọn như sau: SSSS, tấm vuông  $a=b$ , hệ số phân bố vật liệu  $n=2.5$ , hệ số lỗ rỗng  $e=0.15$ , và tỉ lệ chiều dày  $h_a/h_0=1.3$ ,  $h_b/h_0=1.4$ . Nhìn chung, đối với mỗi giá trị  $c/a$ , sự thay đổi của  $\psi$  chỉ làm thay đổi tần số ở mức rất nhỏ, cho thấy hướng nứt không phải là tham số chi phối độ cứng tổng thể của kết cấu trong cấu hình khảo sát.

Tuy nhiên, một đặc điểm đáng chú ý là tần số đạt giá trị nhỏ nhất khi  $\psi=45^\circ$ . Điều này gợi ý rằng tại góc nghiêng này, vết nứt có xu hướng tạo ra tác động cắt-uốn kết hợp mạnh hơn, dẫn đến suy giảm độ cứng hiệu dụng cao hơn so với các góc còn lại.

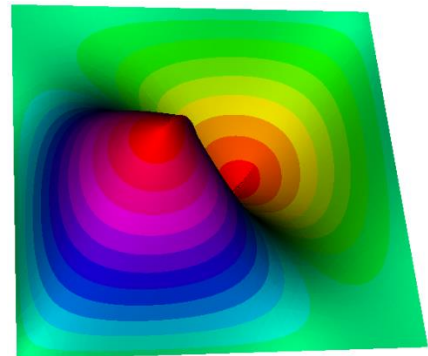
a)



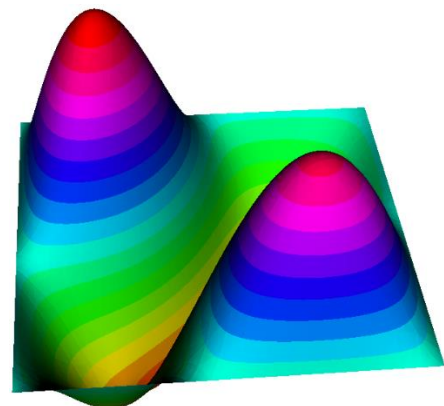
b)



c)



d)



**Hình 3.** Một số dạng dao động của tấm FG nứt, có lỗ rỗng trên nền đàn hồi. (a) Mode 1:  $\tilde{\omega}_1 = 5.3513$ , (b) Mode 2:  $\tilde{\omega}_2 = 11.9968$ , (c) Mode 3:  $\tilde{\omega}_3 = 14.49$ , (d) Mode 4:  $\tilde{\omega}_4 = 21.85$ .

Hình 3 minh họa một số dạng dao động riêng đặc trưng của tấm FG nứt có lỗ rỗng, với các tham số: tấm vuông  $a = b = 0.5m$ , điều kiện biên SSSS, chiều dày biến thiên theo hai phương với  $h_0 = a/100$ ,  $h_a/h_0=1.5$ ,  $h_b/h_0=1.3$ , hệ số vật liệu  $n=1.2$  hệ số lỗ rỗng  $e=0.14$ , chiều dài vết nứt  $c/a=0.6$ , góc nghiêng  $\psi=45^\circ$ , và nền đàn hồi  $(K_w, K_s)=(30,3)$ .

Các kết quả cho thấy, biên độ lớn nhất của các mode thường lệch hơn về phía tấm có độ dày nhỏ hơn do độ cứng cục bộ tại đó nhỏ hơn. Bên cạnh đó, vết nứt, nền đàn hồi và phân bố FG cùng ảnh hưởng đáng kể tới hình thái mode, đặc biệt tại các mode bậc cao.

Bảng 8 thể hiện sự thay đổi tần số dao động riêng của tấm FG nứt có lỗ rỗng đối với các kiểu điều kiện biên khác nhau, trong bối cảnh chiều dài vết nứt tăng dần theo tỉ lệ  $c/a$ . Các tham số khảo sát gồm: tấm vuông  $a=b$ , hệ số lỗ rỗng  $e=0.25$ , hệ số vật liệu  $n=1.2$ , góc nghiêng vết nứt  $\psi=0$ , tỉ lệ chiều dày  $h_a/h_0=1.3$ ,  $h_b/h_0=1.5$ , và nền đàn hồi  $(K_w, K_s)=(70,5)$ . Cần chú ý ký hiệu điều kiện biên, ví dụ: SCSF thể hiện cạnh 1 và 3 được liên kết tựa (S), cạnh 2 liên kết ngàm (C), cạnh 4 tự do (F) (Hình 1). Các cấu hình biên được xem xét theo thứ tự từ mềm đến cứng.

**Bảng 8.** Ảnh hưởng của điều kiện biên đến tham số tần số dao động của tấm.

| Điều kiện biên | Tỉ lệ chiều dài vết nứt ( $c/a$ ) |         |         |         |
|----------------|-----------------------------------|---------|---------|---------|
|                | 0                                 | 0.3     | 0.5     | 0.7     |
| CFFF           | 1.43302                           | 1.42982 | 1.42309 | 1.41053 |
| FCFF           | 1.82957                           | 1.82914 | 1.82837 | 1.82704 |
| FFCF           | 1.92408                           | 1.91147 | 1.88627 | 1.84265 |
| SSSS           | 5.87726                           | 5.68328 | 5.45269 | 5.25157 |
| CFCF           | 6.40974                           | 6.21087 | 5.91582 | 5.55319 |
| SCSC           | 8.36320                           | 8.00471 | 7.58260 | 7.21138 |
| CCCC           | 10.29540                          | 9.94166 | 9.56520 | 9.27522 |

Kết quả cho thấy tần số dao động tăng đáng kể khi điều kiện biên trở nên ngàm cứng hơn, trong đó cấu hình CCCC cho giá trị cao nhất, còn các cấu hình có biên tựa hoặc tự do cho tần số thấp hơn rõ rệt. Cũng cần để ý ba điều kiện biên CFFF, FCFF, FFCF đều chỉ có một cạnh có liên kết ngàm nhưng CFFF được ngàm ở vị trí cạnh có độ dày nhỏ nhất nên dễ mất ổn định hơn hai điều kiện biên còn lại. Xu hướng suy giảm tần số theo sự gia tăng chiều dài vết nứt vẫn được duy trì ở mọi dạng biên, tuy nhiên mức độ suy giảm khác nhau tùy cấu hình, cho thấy sự tương tác mạnh giữa

cơ chế suy yếu do nứt và sự ràng buộc biên. Đặc biệt, ở các cấu hình biên mềm, vết nứt gây ảnh hưởng lớn hơn đến đáp ứng dao động, trong khi ở cấu hình ngàm hoàn toàn, vai trò suy yếu của vết nứt bị hạn chế nhờ độ cứng biên cao độ cứng biên cao.

## 5. Kết luận

Bài báo đã phát triển một mô hình tính toán cho bài toán dao động tự do của tấm cơ tính biến thiên có vết nứt và lỗ rỗng, với chiều dày biến thiên theo hai phương và tựa trên nền đàn hồi kiểu Winkler–Pasternak. Mô hình được xây dựng dựa trên lý thuyết tấm Mindlin, phương pháp phần tử hữu hạn và cách tiếp cận Phase-Field để mô phỏng sự suy yếu do vết nứt. Các kết quả kiểm chứng so với tài liệu đã công bố cho thấy mô hình đạt độ tin cậy cao. Ngoài ra, mô hình cho phép khảo sát linh hoạt nhiều kiểu điều kiện biên khác, qua đó đánh giá rõ ảnh hưởng của liên kết biên đến đáp ứng dao động.

Kết quả tính toán chỉ ra rằng: (i) sự hiện diện của vết nứt làm suy giảm đáng kể tần số dao động, trong đó chiều dài vết nứt là tham số chi phối mạnh nhất; (ii) góc nghiêng vết nứt có ảnh hưởng hạn chế, song tần số thấp nhất xuất hiện gần  $\psi=45^\circ$ ; (iii) độ cứng nền đàn hồi làm tăng tần số và giảm mức độ suy yếu do nứt; (iv) biến thiên chiều dày hai chiều gây phân bố độ cứng không đồng đều, ảnh hưởng rõ đến dạng mode; (v) lỗ rỗng vật liệu tác động khác biệt tùy theo tham số vật liệu  $n$ ; và (vi) điều kiện biên cứng (CCCC) tạo ra tần số cao nhất, trong khi các cấu hình có biên mềm làm tăng độ nhạy của tấm đối với vết nứt.

Bên cạnh các kết quả đạt được, nghiên cứu hiện tại mới tập trung vào một vết nứt đơn ở giữa tấm, lỗ rỗng phân bố đều theo chiều dày, và bài toán dao động tự do. Do đó, trong các nghiên cứu tiếp theo, mô hình có thể được mở rộng để khảo sát vết nứt tại các vị trí biên hoặc đa vết nứt, lỗ rỗng phân bố không đều theo chiều dày, cũng như dao động cưỡng bức dưới tác động của tải trọng xe chạy, tải trọng va đập hoặc tải nhiệt–cơ. Những hướng phát triển này sẽ góp phần nâng cao tính thực tiễn của mô hình đối với các kết cấu tấm trong lĩnh vực giao thông và kỹ thuật.

## Đóng góp của các tác giả trong bài báo

**Nguyễn Thị Kim Khuê:** Phương pháp, quản lý dữ liệu, phân tích chính thức, điều tra, xác thực, trực quan hóa, tiếp nhận tài trợ, viết – bản thảo

gốc. **Phạm Minh Phúc:** Biên soạn dữ liệu, phân tích dữ liệu, điều tra, xác thực, viết – bản thảo gốc, phương pháp, giám sát, tiếp nhận tài trợ, chỉnh sửa bản thảo, phản hồi ý kiến phản biện.

### **Tuyên bố không xung đột lợi ích và cam kết bản quyền**

Các tác giả tuyên bố về sự không xuất hiện những xung đột tiềm ẩn từ nghiên cứu này, và cam kết bài báo chưa từng được công bố trước đây.

### **Chia sẻ dữ liệu theo yêu cầu**

Dữ liệu sẽ được cung cấp theo yêu cầu.

### **Lời cảm ơn**

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Giao thông vận tải (ĐH GTVT) trong đề tài mã số T2026-CB-004.

1<sup>st</sup> Nguyen Thi Kim Khue. *Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications*

2<sup>nd</sup> Pham Minh Phuc\*. *Faculty of Basic Sciences, University of Transport and Communications*

\*Corresponding author: phamminhphuc@utc.edu.vn

### **Tài liệu tham khảo**

- [1] M. Huang, X. Q. Ma, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, "Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness and point supports," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 300, pp. 435–452, 2007, doi: 10.1016/j.jsv.2005.01.059.
- [2] S. Jandaghi Semnani, R. Attarnejad, R. Kazemi Firouzjaei, "Free vibration analysis of variable thickness thin plates by two-dimensional differential transform method," *Acta Mechanica*, vol. 224, pp. 1805–1823, 2013, doi: 10.1007/s00707-013-0833-2.
- [3] G. P. Sinha, B. Kumar, "Frequency analysis of variable thickness Kirchhoff plates by isogeometric approach," *Journal of the Institution of Engineers, Series C*, vol. 104, no. 2, pp. 271–280, 2023, doi: 10.1007/s40032-023-00910-7.
- [4] R. Pilafkan, P. D. Folkow, "Free vibration analysis of rectangular plates with variable thickness using a meshless method," *Forces in Mechanics*, vol. 21, p. 100328, 2025, doi: 10.1016/j.finmec.2025.100328.
- [5] V. Kumar, S. J. Singh, V. H. Saran, S. P. Harsha, "Vibration Characteristics of Porous FGM Plate with Variable Thickness Resting on Pasternak's Foundation," *European Journal of Mechanics / A Solids*, vol. 85, Art. No. 104124, 2021, doi: 10.1016/j.euromechsol.2020.104124.
- [6] E. Yildirim, I. Esen, "Effect of the Porous Structure on the Hygrothermal Vibration Analysis of Functional Graded Nanoplates Using Nonlocal High-Order Continuum Plate Model," *Acta Mechanica*, vol. 235, pp. 5079–5106, 2024, doi: 10.1007/s00707-024-03990-3.
- [7] M. Izadi, M. Abedi, P. S. Valvo, "Free Vibration Analysis of a Functionally Graded Porous Triangular Plate with Arbitrary Shape and Elastic Boundary Conditions Using an Isogeometric Approach," *Thin-Walled Structures*, vol. 205, Part B, Art. No. 112422, 2024, doi: 10.1016/j.tws.2024.112422.
- [8] Y. Xue, C. Zhang, K. Shi, Y. Gao, Z. Gao, "Free Vibration Analysis of Functionally Graded Porous Corrugated Plates with Porosity Distributions in the Thickness and Width Directions," *Advances in Engineering Software*, vol. 212, Art. No. 104066, 2026, doi: 10.1016/j.advengsoft.2025.104066.
- [9] P. P. Minh, D. T. Manh, N. D. Duc, "Free vibration of cracked FGM plates with variable thickness resting on elastic foundations," *Thin-Walled Structures*, vol. 161, Art. No. 107425, 2021, doi: 10.1016/j.tws.2020.107425.
- [10] V. N. Thanh, P. M. Phuc, "Ảnh hưởng của lỗ rỗng và vết nứt tới dao động tự do của tấm FGM có chiều dày thay đổi parabol," *Journal of Transportation Science and Technology*, vol. 14, no. 3, pp. 41–52, 2025, doi: 10.55228/JTST.14(3).41-52.
- [11] P. M. Phuc, "Using phase field and third-order shear deformation theory to study the effect of cracks on free vibration of rectangular plates with varying thickness," *Transport and Communications Science Journal*, vol. 71, no. 7, pp. 853–867, 2020, doi: 10.47869/tcsj.71.7.10.
- [12] B. K. Chandrakar, N. K. Jain, A. Gupta, "Nonlinear vibration analysis of a cracked isotropic plate with varying thickness coupled with fluid," *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, vol. 47, Art. No. 335, 2025, doi: 10.1007/s40430-025-05616-8.
- [13] M. Huang, T. Sakiyama, H. Matsuda, C. Morita, "Free vibration analysis of stepped rectangular plates resting on non-homogeneous elastic foundations," *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 50, pp. 180–187, 2015, doi: 10.1016/j.enganabound.2014.07.015.
- [14] H.-J. Jiang, Q.-Z. Guo, X.-G. Wang, N.-H. Gao, "Comparison of free vibration behaviors for simply supported and clamped T-shaped thin plate resting on Winkler elastic foundation," *Thin-Walled Structures*, vol. 197, Art. No. 111621, 2024, doi: 10.1016/j.tws.2023.111621.

- [15] L. Kurpa, F. Pellicano, T. Shmatko, A. Zippo, "Free vibration analysis of porous functionally graded material plates with variable thickness on an elastic foundation using the R-functions method," *Mathematical and Computational Applications*, vol. 29, no. 1, Art. No. 10, 2024, doi: 10.3390/mca29010010.
- [16] M. Foroughi, M. Azhari, S. Sarrami, H. Foroughi, "Free vibration and stability analyses of functionally graded plates resting on elastic foundations based on 2D and quasi-3D shear deformation theories using the finite strip method," *Thin-Walled Structures*, vol. 206, Art. No. 112715, 2025, doi: 10.1016/j.tws.2024.112715.
- [17] B. Singh, V. Saxena, "Transverse vibration of a rectangular plate with bidirectional thickness variation," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 198, no. 1, pp. 51–65, 1996, doi: 10.1006/jsvi.1996.0556.